

包含股票的金融资产组合 中农户投资型寿险需求研究

毕泗锋*

摘要: 在连续时间动态模型框架下,本文探究收益率随机波动的投资型寿险需求在包含股票的金融投资组合中的变化规律。模型假设投资型寿险保费分为寿险纯保费和投资性保费两部分,其中寿险纯保费关注基本死亡保障,而投资性保费关注财富增值。在一个包含无风险资产储蓄和风险资产股票的金融资产组合中,探究投资型寿险需求随时间变化的规律。股票与投资性保费均假定遵循一维几何布朗运动,两者相关但存在竞争关系。使用比较动态方法以及数值模拟方法,研究发现:初始财富、投资型寿险收益率对投资型寿险总需求有正向影响,而市场利率、风险厌恶系数等因子产生反向影响,死亡率影响效应不确定;投资型寿险与股票的相关性对投资型寿险需求产生显著影响。

关键词: 投资型寿险 金融资产组合 连续时间动态模型

一、引言

寿险需求的理论和实证研究大多围绕定期寿险产品展开。尽管,目前实务界的发展显示,分红保险、万能寿险、投资连接产品等投资型寿险已居于寿险业发展的主导地位,但理论研究对投资型寿险的分析有明显的忽略,这体现在两个方面:一是涉及投资型寿险需求的实证研究缺乏理论分析的框架,多数研究仅使用被解释变量(一般为保费规模、保险密度等)和解释变量的数据做计量检验,变量之间关系的数理逻辑探究有所欠缺;二是寿险需求的理论研究文献并没有针对投资型寿险的特征进行有效的刻画与描述。基于此,本文试图在定期寿险需求研究文献的基础上,给出一个分析投资型寿险需求的分析框架。进一步的,本文尝试在金融资产组合中引入股票,在股票和投资型寿险两种风险资产并存的金融资产池中研究投资型寿险的需求。本文所指投资型寿险,是一种带有投资功能的寿险产品。投保人购买投资型寿险所缴纳的保费,从功能上可以分为两部分,一部分是提供纯保障的自然保费,另一部分则是具有增值功能的投资性保费。自然保费减少了投保人当期的财富水平,而投资性保费则像储蓄、股票一样可以为财富带来增值的机会。而且,这部分保费投资于一个类似基金的产品,其期望收益率比无风险储蓄要高,而风险也要更大。至于投保人如何在投资性保费和股票投资之间进行选择,则有赖于投保人对此二者收益、风险的综合权衡。

许多学者曾使用动态优化方法研究寿险需求决策问题。Yaari(1965)通过引入寿命密度函数,将生命不确定性的难题转化为一个较容易处理的确定时间段 $[0, T]$ 内的动态优化问题,

* 毕泗锋,山东财经大学金融学院,邮政编码:250014,电子信箱:bisifeng@gmail.com。

本文受山东省高等学校协同创新计划“金融产业优化与区域发展管理协同创新中心”项目“区域金融风险生成机制与管控体系构建——以山东为例”(项目编号:JR2013008)和山东财经大学博士科研基金资助。感谢匿名审稿人的宝贵意见,文责自负。

开创了使用动态优化方法研究寿险需求的先河。而且,其模型可同时处理消费、金融资产(这里主要是无风险资产储蓄)与保险需求,是多金融资产组合中寿险需求研究的奠基性文献。其后, Richard(1975)在 Yaari(1965)以及 Merton(1971)工作的基础上,使用连续时间动态模型研究消费、人寿保险与金融投资组合的最优决策,并在不变相对风险厌恶系数(CRRA)函数下,给出了消费、保险以及投资的最优显式解。Ye(2006)的研究借鉴 Merton(1969,1971)的随机动态优化模型,通过修改目标函数,巧妙处理优化决策的边界条件不满足问题,从而成功处理了风险资产、无风险资产、消费和寿险的均衡决策。丁传明(2003)以严格的数学模型分析生命不确定性、风险资产随机波动性以及劳动收入随机波动性约束下的保险需求决策。作者所分析的保险对象较为宽泛,包括了财产保险、定期寿险以及年金保险等。

与以往文献相比,本文将在两个方面努力做出贡献:其一,我们将拓展研究对象的范围。Yaari(1965)等人的研究主要围绕定期寿险展开分析,而本文将研究对象从定期寿险拓展为投资型寿险;其二,我们将引入股票这一风险资产,探究两风险资产并存的资产池中家户对投资型寿险的需求规律。多风险资产并存的假设与现实经济更为接近,虽然计算复杂,但其结论可能更有说服力。

本文的结构安排如下,接下来第二部分为基本假设,第三部分为均衡解的比较动态分析,第四部分是数值模拟,第五部分为结论。

二、基本模型

(一)死亡率与生存率的数学描述

以 $f(t)$ 表示个体寿命为 τ 的概率密度函数,满足 $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$,这里, $f(t) \geq 0, \forall t \in [0, \infty]$ 。

以余命分布函数 $F(t)$ 刻画时刻 t 之前被保险人死亡的概率,满足 $F(t) = P(\tau < t) = \int_0^t f(u) du$ 。那

么,与之相反的被保险人的生存函数 $\bar{F}(t)$ 则满足: $\bar{F}(t) = P(\tau \geq t) = \int_t^{\infty} f(u) du$ 。

定义被保险人在 t 时的瞬时死亡率函数 $\pi(t)$ 如下:

$$\pi(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(t \leq \tau < t + \delta t | \tau > t)}{\delta t} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{\delta t} \cdot \frac{1}{F(t)} = \frac{f(t)}{F(t)} \quad (1)$$

由式(1)我们可以得到被保险人死亡率与生存函数、概率密度之间的数学关系: $\bar{F}(t) = \exp\{-\int_0^t \pi(s) ds\}$, $f(t) = \pi(t) \exp\{-\int_0^t \pi(s) ds\}$ 。

考虑到人类死亡率递增的自然规律,可以假设被保险人的瞬时死亡率满足如下数学条件: $\lim_{t \rightarrow 0} \pi(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = 1$ ^①。

以 $f(s, t)$ 表示被保险人在时刻 t 生存的条件下, s 时刻死亡的条件概率,满足条件: $f(s, t) = \frac{f(s)}{F(t)} = \pi(s) \exp\{-\int_t^s \pi(u) du\}$ 。以 $\bar{F}(s, t)$ 表示被保险人在 t 时刻生存条件下生存至 s 时刻的

条件概率,同样有 $\bar{F}(s, t) = \frac{\bar{F}(s)}{F(t)} = \exp\{-\int_t^s \pi(u) du\}$ 。

^①这里,假设人的寿命趋近无穷大,只是为了近似地表达“随着时间的正向变动死亡率会渐变为1”的思想。从技术的角度看,只要将时间单位理解为很小的数值,该假设便有其合理的意义。当然,本文如此处理的一个更为重要的原因在于动态均衡解的可获得性。从研究的效果而言,该假设不会产生实质的干扰。

(二) 风险资产:投资型寿险与股票

本部分描述投资型寿险和股票这两类风险资产的特性。假定投资型寿险的总保费支出为 $P(t) = p(t) + S_1(t)$, 其中 $p(t)$ 为纯保费, $S_1(t)$ 为具有投资功能的投资性保费。若纯保险费率为 $\eta(t)$, 保险金额则为 $\vartheta(t) = p(t)/\eta(t)$ 。若投资性保费的平均回报率为 μ_1 , 波动方差为 σ_1^2 , 且 $S_1(t)$ 遵循几何布朗运动, 那么投资保费部分满足随机微分方程:

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz_1(t) \quad (2)$$

这里, $z_1(t)$ 为一个维纳过程(Wiener Process)。

假设股票在 t 时刻的价值为 $S_2(t)$, 期望回报率为 μ_2 , 波动方差为 σ_2^2 。同样假设股票价值遵循一维几何布朗运动, 其运动方程满足如下条件:

$$\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz_2(t) \quad (3)$$

这里, $z_2(t)$ 为一个维纳过程。

关于 $z_1(t)$ 、 $z_2(t)$ 这两个维纳过程, 我们假设其关系满足:

$$dz_i dz_j = \rho_{ij} dt \quad i, j = 1, 2 \quad (4)$$

其中 ρ_{ij} 为相关系数, 满足 $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ 。而且, 当 $i = j$ 时, $\rho_{ij} = 1$ 。为了计算时书写的方便, 我们在文中记 $\rho = \rho_{12} = \rho_{21}$ 。

(三) 马歇尔效用函数

假设被保险人(或投保人)既关心自己的消费水平, 也关心自己死亡时刻留给家人的遗产数量。购买了寿险的被保险人在死亡时刻(其家人)所获取的保险金, 自然是其遗产中的重要组成部分。我们分别设定消费效用函数与遗产函数的具体形式。

消费效用函数设定为 $U(c(t)) = \frac{e^{-\delta t} c^r}{r}$ 。这是一个不变相对风险厌恶系数(CRRA)效用函数, 假设 $\delta > 0, r < 1$ 。若 $(1-r)$ 表示风险厌恶程度, 那么参数 r 越小风险厌恶程度越高。

遗产效用函数设定为 $Z(t) = w(t) + \vartheta(t) = w(t) + p(t)/\eta(t)$ 。这里, $w(t)$ 为被保险人死亡时刻积累的财富存量。 $\vartheta(t)$ 为保险公司给付的保险金。如果我们也假设遗产效用函数满足 CRRA 函数特征, 那么可以设定其函数形式如下:

$$B(Z(t)) = B\left(w(t) + \frac{p(t)}{\eta(t)}\right) = \frac{e^{-\delta t} (w(t) + p(t)/\eta(t))^r}{r} \quad (5)$$

(四) 财富及其微分运动方程

被保险人的财富约束方程受到消费、保费以及投资的影响。在任一时刻 t , 被保险人可以选择任意的消费量 $c(t)$, 花费一部分不产生任何金融收益的纯保费 $p(t)$, 分配一部分财富到无风险的储蓄账户, 分配一部分财富到有风险的股票账户和投资型寿险的投资账户。显然, 前两项(即 $c(t)$ 、 $p(t)$ 部分)减少了当前的财富存量, 而后几项则增加了财富存量。

假设无风险的储蓄账户价值为 $S_0(t)$, 回报率是 μ_0 , 满足微分方程: $\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = \mu_0 dt$ 。

假设被保险人期初的财富存量为 w_0 , 投资于投资型寿险保费的比例为 κ_1 , 投资股票账户的比例为 κ_2 , 很自然的, 投资于无风险储蓄的比例便是 $1 - \kappa_1 - \kappa_2$ 。由此, 我们得到财富约束方程(证明见附录 1):

$$dw = (w(t)(1 - \kappa_1 - \kappa_2)\mu_0 + w(t)\kappa_1\mu_1 + w(t)\kappa_2\mu_2 - p - c)dt + w(t)\kappa_1\sigma_1 dz_1 + w(t)\kappa_2\sigma_2 dz_2 \quad (6)$$

式(6)说明,财富的波动既包括随时间移动引起的瞬时变化,也包括由于两种风险资产收益率的随机波动带来的变化部分。

在以上假设条件之下,定义优化问题的最优值函数(证明见附录2):

$$J(w, t) = \text{Max}_{c, p, \kappa_1, \kappa_2, w} \int_t^{\infty} [\bar{F}(u, t)U(c(u)) + f(u, t)B(Z(u))] du \quad (7)$$

值函数满足, $\lim_{t \rightarrow \infty} J(w, t) = 0$ 。

这时,决策者的目标相当于求解如下的随机动态优化问题:

$$\begin{aligned} J(w, t) &= \text{Max}_{c, p, \kappa_1, \kappa_2, w} \int_t^{\infty} [\bar{F}(u, t)U(c(u)) + f(u, t)B(Z(u))] du \\ \text{s. t } dw &= w(t)(1 - \kappa_1 - \kappa_2)\mu_0 + w(t)\kappa_1\mu_1 + w(t)\kappa_2\mu_2 - p - c)dt + w(t)\kappa_1\sigma_1dz_1 + w(t)\kappa_2\sigma_2dz_2 \\ Z(t) &= w(t) + p(t)/\eta(t) \\ w(0) &= w_0, w(t)_{t \rightarrow \infty} \text{ 自由} \end{aligned} \quad (8)$$

考虑公平保费条件 $\eta(t) = \pi(t)$, 使用最优动态规划方法求解式(8), 得到均衡消费、均衡保费、均衡财富以及投资比例的表达式如下:

$$\begin{cases} c^*(t) = (Ar)^{\frac{1}{r-1}}w_0e^{G(z(t), t)} & (9a) \\ p^*(t) = [(Ar)^{\frac{1}{r-1}} - 1]\pi(t)w_0e^{G(z(t), t)} & (9b) \\ w^*(t) = w_0e^{G(z(t), t)} & (9c) \\ \kappa_1^* = \frac{\sigma_2(\mu_1 - \mu_0) - \sigma_1\rho(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1^2\sigma_2(1 - \rho^2)(1 - r)} & (9d) \\ \kappa_2^* = \frac{\sigma_1(\mu_2 - \mu_0) - \sigma_2\rho(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_1\sigma_2^2(1 - \rho^2)(1 - r)} & (9e) \end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned} G(z(t), t) &= \kappa_1\sigma_1z_1(t) + \kappa_2\sigma_2z_2(t) + [(1 - \kappa_1 - \kappa_2)\mu_0 + \kappa_1\mu_1 + \kappa_2\mu_2 - (Ar)^{\frac{1}{r-1}} - \\ & (Ar)^{\frac{1}{r-1}}\pi(t) + \pi(t) - \frac{1}{2}\kappa_1^2\sigma_1^2 - \frac{1}{2}\kappa_2^2\sigma_2^2 - \kappa_1\kappa_2\sigma_1\sigma_2\rho]t + \int_0^t \frac{1}{1-r}\pi(u)du \end{aligned} \quad (10)$$

均衡条件下投资型寿险保费支出总额便为:

$$P(t)^* = p(t)^* + w(t)^*\kappa_1^* = \left\{ [(Ar)^{\frac{1}{r-1}} - 1]\pi(t) + \frac{\sigma_2(\mu_1 - \mu_0) - \sigma_1\rho(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1^2\sigma_2(1 - \rho^2)(1 - r)} \right\} w_0e^{G(z(t), t)} \quad (11)$$

三、均衡解的讨论

本部分讨论在均衡条件下,各外生变量对投资型寿险总保费的影响效应。

如前计算,公平保费下均衡状态的投资型寿险保费支出总额为式(11)。显然,直接对均衡总保费求各参变量的偏导数需要庞大的计算,且计算结果非常繁琐。实际上,繁琐的表达并无益于判断参变量的影响方向及其程度。因此,我们将在数值模拟部分进行更为直观的分析。这里,我们仅尝试从总保费占财富量的角度去分析各个参变量的影响效应。通过这种转化,我们可以发现随着时间的推移,含有投资部分的总保费占财富总量的比例随参变量动态变化的规律或者特征。

由总保费均衡等式(11),可以写出总保费占比的表达式如下:

$$\kappa_3 = \frac{P^*(t)}{w^*(t)} = [(Ar)^{\frac{1}{1-\rho}} - 1] \pi + \frac{\sigma_2(\mu_1 - \mu_0) - \sigma_1 \rho(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1^2 \sigma_2 (1 - \rho^2) (1 - r)} \quad (12)$$

我们接下来分 $\rho = 0$ 、 $\rho \neq 0$ 两种情况进行讨论。

(一) $\rho = 0$ 的简单情形

当两布朗运动一阶变差的相关系数为零,参数 Ar 的形式可以大大简化。对简化后的式(12)分别求关于各参变量的偏导数,我们即可以获得投资型寿险总保费占比随参变量变动的计算结果。相关参数对总保费的影响效应汇总于表1中。

表1 投资险总保费占比的影响效应计算结果表 ($\pi(t) = \eta(t)$, $\rho = 0$)

影响因素	影响效应表达式
时间贴现因子	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \delta} = \frac{1}{(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t)$
死亡率	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \pi(t)} = \frac{-\delta - r + \mu_0 r + [(\mu_0 - \mu_1)^2 r / 2\sigma_1^2 (1-r)] + [(\mu_0 - \mu_2)^2 r / 2\sigma_2^2 (1-r)]}{(1-r)(1+\pi(t))^2} \pi(t) + \frac{\delta - (\mu_0 + \pi(t))r - [(\mu_0 - \mu_1)^2 r / 2\sigma_1^2 (1-r)] + [(\mu_0 - \mu_2)^2 r / 2\sigma_2^2 (1-r)]}{(1-r)(1+\pi(t))}$
无风险利率	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \mu_0} = \frac{[(\mu_1 - \mu_0)r / \sigma_1^2 (1-r)] + [(\mu_2 - \mu_0)^2 r / \sigma_2^2 (1-r)] - r}{(1-r)(1+\pi(t))} \cdot \pi(t) - \frac{1}{\sigma_1^2 (1-r)}$
风险厌恶参数	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial r} = \left[\frac{\delta - \mu_0 - \pi(t)}{(1-r)^2 (1+\pi(t))} - \frac{(\mu_0 - \mu_1)^2 (1+r)}{\sigma_1^2 (1-r)^3 (1+\pi(t))^2} - \frac{(\mu_0 - \mu_2)^2 (1+r)}{\sigma_2^2 (1-r)^3 (1+\pi(t))^2} \right] \pi(t) + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1^2 (1-r)^2}$
投资险收益	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \mu_1} = -\frac{(\mu_1 - \mu_0)r / \sigma_1^2 (1-r)}{(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t) + \frac{1}{\sigma_1^2 (1-r)}$
股票收益	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \mu_2} = -\frac{(\mu_2 - \mu_0)r / \sigma_2^2 (1-r)}{(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t)$
投资险方差	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \sigma_1^2} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2 r / \sigma_1^4 (1-r)}{2(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t) - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1^4 (1-r)}$
股票方差	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \sigma_2^2} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2 r / \sigma_2^4 (1-r)}{2(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t)$

计算结果显示,时间贴现因子随时间推移对均衡总保费产生正向影响。这就意味着贴现因子越大,投保人购买的投资型寿险就会越多。股票的收益率越高,风险(即股票的标准差)越小,投资型寿险的需求就会越少,这显然是风险资产之间竞争替代关系的体现。

除此之外的其他外生因子对总保费的影响效应是不明确的。或许它们对总保费施加了明确的影响,但从表达式观察我们难以发现这种影响。为此,我们将在数值模拟部分进行补充分析。

(二) $\rho \neq 0$ 的情形

鉴于两风险资产随机项相关系数对均衡结果的重要性,我们考察 $\rho \neq 0$ 条件下均衡总保费的变化规律。在此条件之下,均衡总保费占比的表达式为:

$$\kappa_3^*(t) = \left[\frac{\delta - (\mu_0 + \eta)r - D}{(1-r)(1+\pi(t))} - 1 \right] \pi + \frac{\sigma_2(\mu_1 - \mu_0) - \sigma_1 \rho(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1^2 \sigma_2 (1 - \rho^2) (1 - r)} \quad (13)$$

其中,

$$D = \frac{r[\sigma_1^2(\mu_2 - \mu_0)^2 + \sigma_2^2(\mu_1 - \mu_0)^2]}{2(1-r)(\sigma_1\sigma_2)^2(1-\rho^2)^2} - \frac{2r\rho(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_0)}{(1-r)(\sigma_1\sigma_2)(1-\rho)(1+\rho)^2} \quad (14)$$

对式(13)分别求关于各参数的偏导数,得到表2的计算结果。

表2 投资寿险总保费占比的影响效应计算结果汇总表($\pi(t) = \eta(t)$ 与 $\rho \neq 0$)

影响因素	影响效应表达式
时间贴现因子	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \delta} = \frac{1}{(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t)$
死亡率	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \pi(t)} = \frac{-\delta - r + \mu_0 r + [(\mu_0 - \mu_1)^2 r / 2\sigma_1^2(1-r)] + [(\mu_0 - \mu_2)^2 r / 2\sigma_2^2(1-r)]}{(1-r)(1+\pi(t))^2} \pi(t) - \frac{2\rho(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1\sigma_2(1-r)^2(1+\rho)(1-\rho^2)(1+\pi(t))^2} + \frac{\delta - (\mu_0 + \pi(t))r - [(\mu_0 - \mu_1)^2 r / 2\sigma_1^2(1-r)] + [(\mu_0 - \mu_2)^2 r / 2\sigma_2^2(1-r)]}{(1-r)(1+\pi(t))}$
无风险利率	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \mu_0} = \left[\frac{r\pi(t)[(\mu_1 - \mu_0)/(1-r) + \sigma_1^2(\mu_1 - \mu_0)/\sigma_2^2(1-r) - \sigma_1^2]}{\sigma^2(1-r)(1+\pi(t))} + \frac{\sigma_1\rho - \sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2(1-\rho^2)(1-r)^2} - \frac{2\rho(\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_0)}{\sigma_1\sigma_2(1-r)^2(1+\rho)(1-\rho^2)(1+\pi(t))} \right] \pi(t)$
风险厌恶参数	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial r} = \left[\frac{\delta - \mu_0 - \pi(t)}{(1-r)^2(1+\pi(t))} + \frac{(\mu_0 - \mu_1)^2(1+r)}{2\sigma_1^2(1-r)^3(1+\pi(t))^2} + \frac{(\mu_0 - \mu_2)^2(1+r)}{2\sigma_2^2(1-r)^3(1+\pi(t))^2} \right] \pi(t) + \frac{\sigma_2(\mu_1 - \mu_0) - \sigma_1\rho(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1^2\sigma_2(1-\rho^2)(1-r)^2} - \frac{4\rho(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1\sigma_2(1-r)^3(1+\rho)(1-\rho^2)(1+\pi(t))} \pi(t)$
投资险收益	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \mu_1} = -\frac{(\mu_1 - \mu_0)r/\sigma_1^2(1-r)}{(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t) + \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)(1-r)} - \frac{2\rho(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1\sigma_2(1-r)^2(1+\rho)(1-\rho^2)(1+\pi(t))} \pi(t)$
股票收益	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \mu_2} = -\frac{(\mu_2 - \mu_0)r/\sigma_2^2(1-r)}{(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t) - \frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)(1-r)} - \frac{2\rho(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_1\sigma_2(1-r)^2(1+\rho)(1-\rho^2)(1+\pi(t))} \pi(t)$
投资险方差	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \sigma_1^2} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2 r / \sigma_1^4(1-r)}{2(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t) + \frac{\rho\sigma_1(\mu_2 - \mu_1) - 2\sigma_2(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_1^3\sigma_2(1-\rho^2)(1-r)} + \frac{2\rho(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1^2\sigma_2(1-r)^2(1+\rho)(1-\rho^2)(1+\pi(t))} \pi(t)$
股票方差	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \sigma_2^2} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2 r / \sigma_2^4(1-r)}{2(1-r)(1+\pi(t))} \pi(t) + \frac{\rho(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1\sigma_2^2(1-\rho^2)(1-r)} + \frac{2\rho(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1\sigma_2^2(1-r)^2(1+\rho)(1-\rho^2)(1+\pi(t))} \pi(t)$
相关系数	$\frac{\partial \kappa_3^*(t)}{\partial \rho} = \left[\frac{2r[(1-\rho)(2\rho^2 - \rho + 1)(\sigma_1\sigma_2)(\mu_1 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_0) - \rho\sigma_1^2(\mu_2 - \mu_0)^2 - \rho\sigma_2^2(\mu_1 - \mu_0)^2]}{(1-r)^2(1+\pi(t))(\sigma_1\sigma_2)^2(1-\rho^2)^3} \right] \pi(t) + \frac{2\rho\sigma_2(\mu_1 - \mu_0) - (1+\rho^2)\sigma_1(\mu_2 - \mu_0)}{\sigma_1^2\sigma_2(1-r)(1-\rho^2)^2}$

计算结果显示,股票的收益和风险对均衡总保费占比的影响由简单情形的反向与正向关系,变为了复杂情形的不确定。其中,相关系数本身起到了决定性作用。如果两风险资产随机

波动的一阶变差为正相关,则股票收益的影响仍然为负相关,股票的风险仍然是正相关。但如果为负相关,则影响方向就不明确了。就影响的程度而言,除了时间贴现因子没有发生变化,其他各参数的影响效应表达式都不同程度的复杂化了。

四、数值模拟分析

(一)数值模拟的几点说明

1. 保费的符号。在数值模拟过程中,保费可能出现正值,也可能出现负值。我们假设,正值保费表示个体向保险公司交纳的一种保费,也就是我们通常所理解的死亡寿险保费。而负值保费可以看做保险公司向个体交纳的“保费”,这实际上是一种类似生存(或者养老)保险的寿险产品。在个体生存的每一时点, he 可以从保险公司获得一个给付(即负值保费),而他所付出的则是死亡时刻的保费(即我们通常所理解的死亡保额)。模型中的个体要通过变换购买死亡保险或者生存(或养老)保险来实现他一生的效用目标。

2. 初始条件。除了死亡率,我们设定其他参数的初始条件如表 3:

参数	初始值	参数	初始值
时间贴现因子	0.05	股票收益率标准差	0.6
市场利率	0.05	风险厌恶参数	0.05
投资寿险利率	0.1	初始财富	1
股票利率	0.15	布朗运动 $z_1(0)$	0
投资寿险标准差	0.5	布朗运动 $z_2(0)$	0

时间贴现因子的初始值设定在较小的范围内,决定了投保人更重视现在而非未来。在此条件约束下,纯消费性保费主要体现为生存寿险保费的形式。

3. 时间点与死亡率的选取。本部分数值模拟选取的寿命区间为 $[5, 100]$, 每隔 5 年取一次值,共有 20 个观察点。尽管本文在模型中假设人的寿命区间为 $(0, \infty)$,但实际上考虑到死亡率因素,大部分人将在 100 岁以前死亡。所以,将寿命区间设定在 $[5, 100]$ 是合理的。

在具体模拟过程中,我们将 5 岁对应时间点 0, 10 岁对应时间点 1/19, …… , 以此类推, 100 岁对应时间点 1。因此,时间的单位变化值为 1/19, 而不是 5, 这样可以简化运算并有效说明问题。

对于死亡率,我们直接选取中国人寿保险业经验生命表(2000 - 2003 年)的真实数据(见表 4)。生命表中提供了男性与女性两类死亡率,我们仅选择男性死亡率进行模拟。

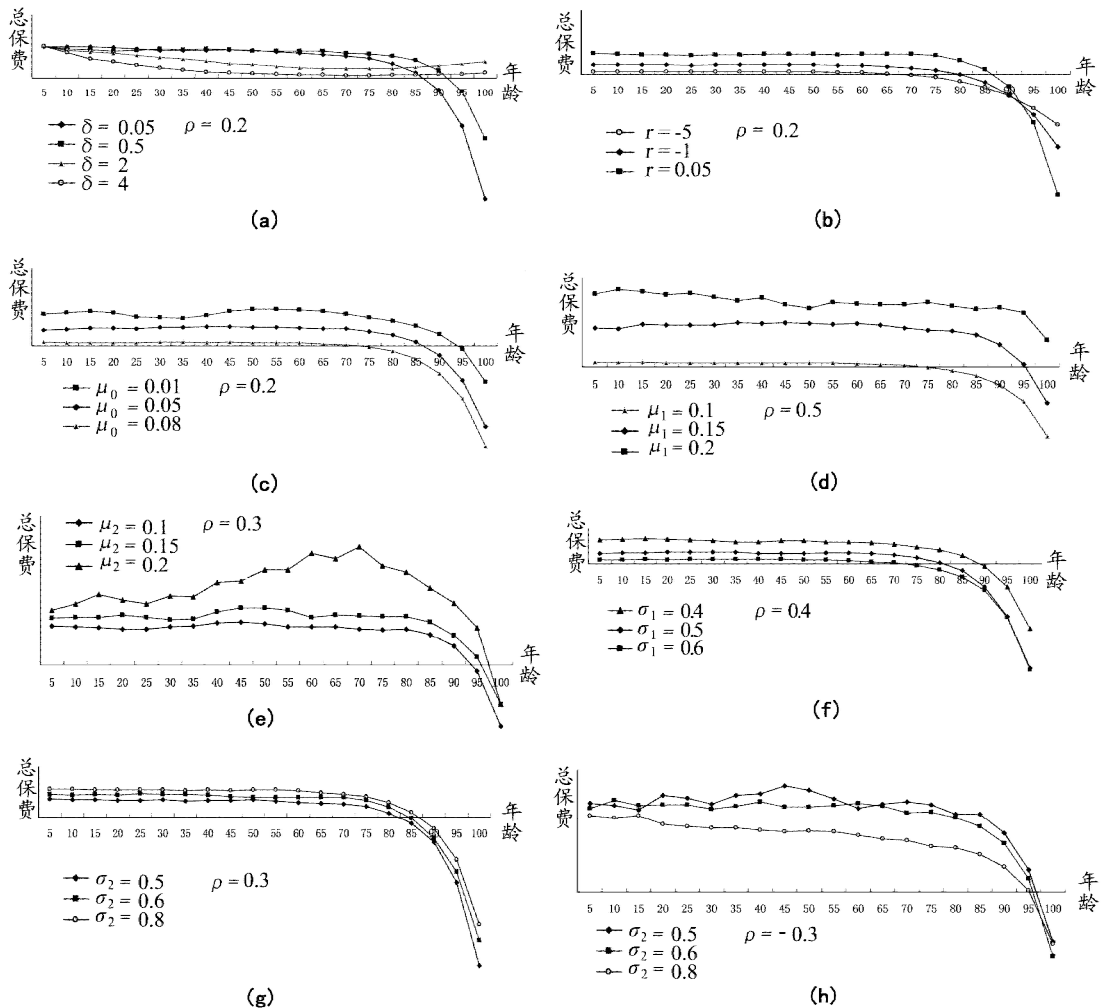
年龄	死亡率	年龄	死亡率
5	0.000323	55	0.005203
10	0.000312	60	0.009313
15	0.000364	65	0.016134
20	0.000621	70	0.027309
25	0.000759	75	0.045902
30	0.000881	80	0.076187
35	0.001194	85	0.125221
40	0.001715	90	0.202621
45	0.002413	95	0.319604
50	0.00357	100	0.48401

资料来源:中国金融教育发展基金会金融理财标准委员会(FPSCC),2007:《金融理财原理(下册)》,中信出版社,第 414 - 417 页。

4. 布朗运动与相关系数。我们使用 Excel2003 数学函数获得了两个一维布朗运动的时间变化轨迹。由于布朗运动是随机变动的,因此均衡保费的时间路径也会随机的发生变化。另外,相关系数的取值以及符号会显著影响均衡投资比例。为保证两风险资产各自的投资比例以及它们的和介于 $[0, 1]$ 之间,我们选取不同的相关系数进行了多次模拟^①,并对符合条件的结果进行了报告。最后,在初始参数条件下,我们对相关系数的影响效应也进行了专门的考察,并给出了模拟的结果(见图1)。

(二)数值模拟结果及其解释

本部分提供各参变量对投资型寿险总保费的影响效应的数值模拟结果(见图1)。在模拟各参变量的影响效应时,考虑到相关系数的影响方向和程度较为一致,我们基本上都只报告了在某一确定相关系数约束下的模拟结果,只有在对股票收益风险特性的影响效应进行模拟时提供了正负相关两种情形下的模拟结果。与本文理论部分的分析相一致,我们仅在公平保费约束下进行模拟计算。



^①本质上而言,相关系数是由投资险和股票收益率的相关数据决定的。不过,由于本文所关心的是投资险需求的变化规律,为节约空间并不失有效性,我们直接给定了各风险资产的平均收益率、方差以及相关系数的数值。

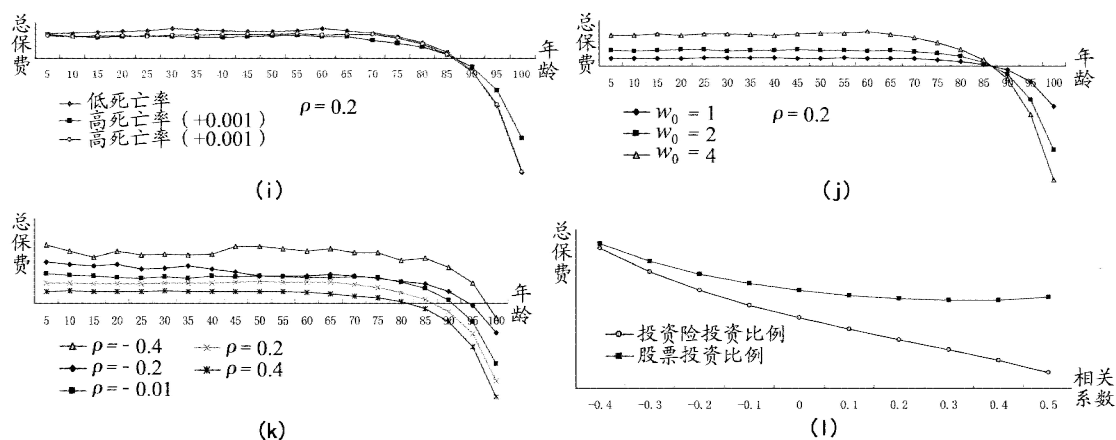


图1 数值模拟结果汇总

时间贴现因子不仅仅会影响到均衡解的数量变化,而且还会导致均衡解符号的改变,因此这里我们取时间贴现因子四个值进行计算,即 $\delta = 0.05, \delta = 0.5, \delta = 2, \delta = 4$,控制相关系数 $\rho = 0.2$,模拟结果见图1(a)。模拟结果显示,不论贴现因子大小如何,均衡总保费会随着投保人年龄的增长而呈现递减态势。当贴现因子较小时,我们发现投保人在生命后期会从死亡寿险转购生存寿险,而贴现因子较大时,投保人终其一生都会选择死亡寿险。

我们取风险厌恶参数的三个值进行模拟分析, $r = -5, r = -1, r = 0.05$ 。风险厌恶参数的更高取值会造成均衡消费为负值,我们没有提供报告。模拟过程中相关系数控制在 $\rho = 0.2$ 。从投资型寿险总保费的时间路径看(见图1(b)),风险厌恶参数对死亡寿险总保费产生了明显的正向影响。这种正向影响在整个生命阶段都比较显著,前期稍微大一些,后期有一个渐进收敛的态势。理性个体在老年阶段存在一个由死亡寿险换购生存寿险行为。风险厌恶参数越小,换购生存寿险的年龄越早一些,即越是厌恶风险的人会更早考虑生存险的购买。而相对不怎么厌恶风险的人购买生存险的时间比较靠后。

取市场利率 $\mu_0 = 0.01, \mu_0 = 0.05, \mu_0 = 0.08$ 三个值进行模拟,模拟中相关系数控制在 $\rho = 0.2$ 。由图1(c)可见,市场利率对均衡总保费产生显著的反向影响效应。影响的程度在整个生命期内都比较显著。市场利率对理性个体换购寿险产品的时间也产生了显著影响。从图形来看,市场利率越高,个体由死亡寿险换购生存寿险的时间就会越早。

我们取投资型寿险收益率的三个值进行模拟: $\mu_1 = 0.1, \mu_1 = 0.15, \mu_1 = 0.2$,模拟过程中相关系数控制在 $\rho = 0.5$ 。从图1(d)来看,投资险收益率对投资型寿险总保费产生了明确的正向影响效应。而且,投资险收益对总保费的影响程度在整个生命期内都比较平稳和显著。投资险收益率对理性个体换购寿险产品的时间也有显著的影响。投资险收益率越低,个体由死亡寿险换购生存寿险的时间就会越早。

我们取股票收益率 $\mu_2 = 0.1, \mu_2 = 0.15, \mu_2 = 0.2$ 三个值进行数值模拟分析,根据数理模型的计算,股票收益率对投资型寿险投资比例的影响会受到相关系数符号的影响,因此我们分别给出 $\rho = 0.3$ 与 $\rho = -0.3$ 条件下的模拟结果。首先看 $\rho = 0.3$ 的模拟结果。股票收益率对均衡总保费产生非常显著的反向影响效应。从图1(e)来看,总保费在大部分时间内表现为死亡寿险,此时,股票收益率越高,投保人购买的寿险就会越少。在生命后期,投保人换购生存寿险。从换购寿险产品的时间来看,股票收益率越高,理性个体由死亡寿险换购生存寿险的时间点就会越早一些。在负相关系数的约束条件下,模拟结果显示,股票收益率对总保费产生显著的正向影响效应。投保人仍然存在换购寿险产品的行为,而且股票收益率越低换购的时间就

会越早。这些结论与 $\rho=0.3$ 条件下模拟结果恰好相反。

我们接下来分析投资险标准差的影响,取如下三个值: $\sigma_1=0.4, \sigma_1=0.5, \sigma_1=0.6$ 。模拟中相关系数控制在 $\rho=0.4$ 。我们从图1(f)基本可以判断,投资型寿险收益率波动越小,风险越小,则投保人对投资型寿险需求的就会越大。

我们取股票收益率标准差的三个值进行模拟: $\sigma_2=0.5, \sigma_2=0.6, \sigma_2=0.8$ 。考虑到相关系数的符号对股票收益率标准差的影响方向会产生作用,我们分别提供了在 $\rho=0.3, \rho=-0.3$ 条件下的模拟结果。首先看 $\rho=0.3$ 条件下的分析。从图1(g)来看,股票收益率标准差对均衡总保费产生显著的正向影响效应。而且,影响效应在整个生命阶段都比较平稳。标准差对投保人换购生存寿险的时间有影响,股票收益率标准差越低,由死亡寿险换购生存寿险的时间就会越早一些。 $\rho=-0.3$ 条件下,股票收益率标准差对总保费的影响效应分析如下。由图1(h)可见,尽管受到了随机波动因素的影响,股票收益率标准差仍然对均衡总保费产生了较为显著的反向影响效应。这一结论与 $\rho=0.3$ 条件下模拟的结果恰好相反。

为了考察死亡率变化对均衡消费、总保费的影响,我们在原始死亡率的基础上分别增加0.001和0.01的幅度,以观察总保费的变化。模拟中相关系数控制在 $\rho=0.2$ 。从图1(i)的形态看,死亡率对均衡解的影响方向并不明确。我们猜测,这一结论可能与我们的公平保费假设有关系。公平保费条件下,死亡率等于保费率,因此死亡率的提升也就意味着保费率的增加,理性的个体不会因为死亡率提升必然增加对死亡寿险的购买。均衡解的表达式说明,所有参变量本身都会对某一个参变量的影响效应产生影响,因此,在我们当前的约束下,并不能说明死亡率的影响方向和影响程度。

我们取初始财富的三个值 $w_0=1, w_0=2, w_0=4$ 进行模拟分析。模拟中相关系数控制在 $\rho=0.2$ 。模拟结果显示,初始财富对总保费产生了显著的正向影响效应。初始财富对总寿险保费的影响与时间有联系:在约85岁之前,个体购买死亡寿险,此时初始财富的正向影响随时间推移而递减,并在约85岁时影响效应达到最小值。在转买生存寿险以后,初始财富生存险保费的正向影响效应呈扩大趋势(见图1(j))。

理论模型的分析表明,相关系数会影响到均衡投资型寿险总保费的变化。而且,相关系数的符号也会产生显著的影响。因此,我们在初始条件下,选取相关系数的四个值进行分析: $\rho=-0.4, \rho=-0.2, \rho=-0.01, \rho=0.2, \rho=0.4$,其中三个负相关,两个正相关。由图1(k)可见,相关系数对均衡总保费产生较为显著的反向影响效应,即相关系数越小,个体购买的总保费(主要是指死亡寿险保费)水平就会越高。

相关系数对均衡投资比例也有重要的影响。我们在初始条件下,选取了一组相关系数,其中既有正相关也有负相关数据,以观察投资比例的变化。由图1(l)可见,随着相关系数由负到正逐渐递增,投资型寿险投资比例和股票投资比例都呈下降走势。其中,投资型寿险投资比例下降的速度要快于股票。因此,在两个投资比重下降的过程中,股票投资占比始终要高于投资险的投资比例。

五、结论

本文的创新之处在于对投资型寿险的模型处理。传统寿险需求模型的分析对象多为纯保障性的定期寿险。因此,投保人支付的寿险保费只能从当期财富中减掉。而现代投资型寿险总保费是由两部分性质不同的保费构成,死亡纯保费部分和传统分析一致,但投资性保费部分有可能使当期财富增加。为使分析更有现实意义,本文引入另一种风险资产——股票,在多种金融资产并存的环境下对投资型寿险需求进行了进一步的研究。我们假设,无风险资产和风

险资产之间存在竞争关系,而风险资产之间也同样存在竞争关系。其中,两种风险资产的收益率均是随机波动的。

在 CRRA 函数的假设条件之下,本文使用莫顿(Merton,1969)“猜解”的方法获得了模型的显式解。在均衡状态下,我们运用比较动态方法和数值模拟方法探讨了各外生因子对投资型寿险总保费的影响效应。大致有如下结论:第一,在被保险人的大部分生命周期内,风险厌恶系数、时间贴现因子、市场利率、投资型寿险收益率标准差对投资型寿险总保费产生反向影响,投资型寿险收益率、初始财富则产生正向影响,死亡率的影响不太确定。第二,股票收益率及其标准差对均衡寿险总保费的影响与相关系数有关。当随机波动项负相关时,股票收益率产生正向影响效应,其标准差产生反向影响;当随机波动项正相关时,股票收益率及其标准差分别产生反向和正向影响效应。第三,相关系数对均衡解产生显著的影响。研究表明,两风险资产的负相关程度越高,则个体对投资型寿险的需求就会越大,而两风险资产的正相关程度越高,那么个体对投资型寿险的需求就会越小。

附录 1:

证明:

定义 $\bar{S}_0(t) = \int_0^t \frac{w(1-\kappa_1-\kappa_2)}{S_0(u)} dS_0(u)$ 为截止到 t 时刻个体无风险储蓄所积累的财富总量,定义 $\bar{S}_1(t) = \int_0^t \frac{w\kappa_1}{S_1(u)} dS_1(u)$ 为截止到 t 时刻个体所投资的投资型寿险中投资保费部分的财富积累总量,定义 $\bar{S}_2(t) = \int_0^t \frac{w\kappa_1}{S_2(u)} dS_2(u)$ 为截止到 t 时刻个体所投资的股票资产部分积累的财富总量。此三部分为财富总量增值的正向驱动因素。

个体在时刻 t 的消费为 $c(t)$,纯保费支付为 $p(t)$ 。同样定义 $[0, \infty)$ 内消费量函数为 $\bar{S}_3(t) = \int_0^t c(u) du$,纯保费支付函数为 $\bar{S}_4(t) = \int_0^t p(u) du$ 。此两部分为财富总量增值的反向驱动因素。

因此,期初财富水平为 w_0 的条件下,个体在 t 时刻的财富总量为:

$$w(t) = w_0 + \bar{S}_0(t) + \bar{S}_1(t) + \bar{S}_2(t) - \bar{S}_3(t) - \bar{S}_4(t) \quad (15)$$

显然, $w(t)$ 是关于 \bar{S}_i 等变量的函数,记 $w(t) = w(\bar{S}_0, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4, t)$ 。在多变量情况下,根据 Itô 引理,对财富 $w(t) = w(\bar{S}_0, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4, t)$ 进行微分,得到:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \sum_{i=0}^4 \frac{\partial w}{\partial \bar{S}_i} d\bar{S}_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{S}_i \partial \bar{S}_j} \right) d\bar{S}_i d\bar{S}_j \quad (16)$$

由于, $\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{S}_i \partial \bar{S}_j} = 0, i, j = 0, 1, 2, 3, 4$, 且:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{S}_i} = 1, i = 0, 1, 2 \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{S}_i} = -1, i = 3, 4 \quad (17)$$

所以:

$$dw = \sum_{i=0}^4 \frac{\partial w}{\partial \bar{S}_i} d\bar{S}_i = \sum_{i=0}^2 d\bar{S}_i - \sum_{i=3}^4 d\bar{S}_i \quad (18)$$

结合式(2)、(3)、(16)、(17)、(18),我们得到:

$$\begin{aligned} dw &= w(t)(1-\kappa_1-\kappa_2)\mu_0 dt + [w(t)\kappa_1\mu_1 dt + w(t)\kappa_1\sigma_1 dz_1] + [w(t)\kappa_2\mu_2 dt + w(t)\kappa_2\sigma_2 dz_2] - pdt - cdt \\ &= (w(t)(1-\kappa_1-\kappa_2)\mu_0 + w(t)\kappa_1\mu_1 + w(t)\kappa_2\mu_2 - p - c) dt + w(t)\kappa_1\sigma_1 dz_1 + w(t)\kappa_2\sigma_2 dz_2 \end{aligned} \quad (19)$$

证毕。

附录 2:

证明:根据假设,个体生存时通过消费增加其效用,但个体死亡时则消费停止。由于个体死亡时间是一个随机变量,因而个体在 $[0, \infty)$ 内的消费效用要用期望值来表达。假设个体在任一时刻 τ 死亡,则 $[0, \tau]$ 内的总消费量为 $\int_0^\tau U(c(s)) ds$ 。由于 $\tau \in [0, \infty)$, 而且其概率密度为 $f(t)$, 因此,在 $[0, \infty)$ 内,消费的期望效用可表达

为: $\int_0^{\infty} f(t) \int_0^t U(c(s)) ds dt$ 。已知个体生存至 t 时刻, 则决策者在 $[t, \infty)$ 内的期望消费效用表达为: $\int_t^{\infty} f(s, t) \int_t^s U(c(u)) du ds$ 。依 Fubini - Tonelli 定理, 变换积分次序, 得到 $[t, \infty)$ 内决策人的消费的期望效用为: $\int_t^{\infty} \bar{F}(s, t) U(c(s)) ds, t \in [0, \infty)$ 。

同样的方式可以处理遗产效用函数。在时期 $[0, \infty)$ 内, t 以概率密度 $f(t)$ 在各连续时点取值, 因此个体关于遗产的期望效用可以表达为 $\int_0^{\infty} f(t) B(Z(t)) dt$ 。若考虑到个体已经生存至 t 时刻, 在 $[t, \infty)$ 内, 个体关于遗产的期望效用为 $\int_t^{\infty} f(s, t) B(Z(s)) ds$ 。

消费效用和遗产效用被假定为可以线性相加, 由此可以设定个体效用函数的值函数形式: $J(w, t) = \text{Max}_{c, p, \kappa_1, \kappa_2, w} \int_t^{\infty} [\bar{F}(u, t) U(c(u)) + f(u, t) B(Z(u))] du$ 。
证毕。

参考文献:

1. 丁传明, 2003:《考虑保险的最优消费、投资模型研究》, 中南大学博士学位论文。
2. 中国金融教育发展基金会金融理财标准委员会(FPSCC), 2007:《金融理财原理(下册)》, 中信出版社。
3. Bellman, R. E. 1957. *Dynamic Programming*. Princeton, N. J. :Princeton University Press.
4. Merton, R. C. 1969. "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous - time Case." *Review of Economic and Statistics*, 51(3): 247 - 257.
5. Merton, R. C. 1971. "Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous - time Model." *Journal of Economic Theory*, 3(4): 373 - 413.
6. Richard, S. 1975. "Optimal Consumption, Portfolio and Life Insurance Rules for an Uncertain Lived Individual in a Continuous Time Model." *The Journal of Financial Economics*, 2(2): 187 - 203.
7. Yaari, M. E. 1965. "Uncertain Lifetime, Life Insurance and The Theory of The Consumer." *Review of Economic Studies*, 32(2): 137 - 150.
8. Ye, Jinchun. 2006. *Optimal Life Insurance Purchase, Consumption and Portfolio under An Uncertain life*. Chicago: University of Illinois at Chicago.

Household Investment Life Insurance Demand in the Portfolio of Financial Assets Including Stocks

Bi Sifeng

(School of Finance, Shandong University of Finance and Economics)

Abstract: In the framework of continuous - time dynamic model, this paper looks into the demand rule of investment life insurance with stochastic returns in the portfolio of financial assets including stocks. The premium of investment life insurance is assumed to be divided into two parts: pure premium and investing premium. The former serves to cover the losses due to death and the latter aims to increase wealth. In a portfolio of financial assets, including both risk - free savings and risky stocks, this paper examines the demand rule of investment life insurance over time. Both stocks and investing premium are assumed to obey the Brownian motion, and the two correlate and compete with each other. By using both Comparative Dynamic Method and Numerical Simulation Method, this paper finds out that initial wealth and the return of investment life insurance have a positive effect on the demand for investment life insurance, while market interest has a negative effect. The effect of mortal rate is unclear. The correlation coefficient between investment life insurance and stock has a dramatic effect on the demand for investment life insurance.

Key Words: Investment Life Insurance; Financial Assets Portfolio; Continuous - time Dynamic Model

JEL Classification: G11, G22, E21

(责任编辑:陈永清)