经济评论
2014年第3期 ECONOMIC REVIEW 总第187期

随机寿命下财富短缺风险度量

张元萍　王力平*

摘要：本文在随机寿命和随机金融资产收益率的假定下，利用必要财富增长率来度量退休人员的财富短缺风险，即在给定的个人财富过程和给定的置信度(95%)下，在给定的时间段内(死亡时刻之前)，使财富值保持为正的最低财富增长率。本文利用随机死亡率模型和退休人员财富变化过程推导退休人员的财富短缺概率，并利用数值算法求解财富短缺概率低于5%时的财富必要收益率。最后，本文从消费的角度划分了三类老年群体：基准群体、遗赠群体和独居群体，比较这三类群体的财富短缺风险特征；之后进行参数敏感性分析，认为消费物价指数和国债收益波动率的增大均加大了老年人的财富短缺风险。本文对必要财富收益率的度量为将来设计多样化养老金融产品的收益率提供了参考标尺。

关键词：财富短缺风险　死亡率模型　随机微分方程　财富增长率

一、引言

在养老金融领域，人口寿命的普遍延长以及金融市场的随机波动影响到老年人的财务规划，加剧了老年人财富不足的风险。本文所度量的财富短缺风险(shortfall risk)是指，在预期寿命随机和未来金融资产收益率随机的情况下，退休人员的财富不足以满足晚年消费的风险。随着医疗条件的改善和生活水平的提高，人口预期寿命延长是一个普遍存在的事实。根据李志生和刘恒甲(2010)的测算，2008年人口零岁余命为73.82岁，而到2017年，人口零岁余命将达到77.07岁。在退休年龄、工资收入、退休金等不变的情况下，人口预期寿命不断延长无疑将加大退休人员未来财富短缺的风险。这种风险的存在也引发了人们的担忧：退休前要积累多少财富才能满足晚年需要。受不同的财富背景、家庭结构、消费习惯的影响，养老所需的绝对财富数量差别很大，而且不具有研究意义。相对来说，利用必要财富增长率来描述养老对财富的要求更具有普遍性。

本文利用退休后必要财富增长率度量财富短缺风险的依据是金融中普遍存在的风险与收益对等的公理。高风险必然要求有高的收益率，低风险伴随着低收益。必要财富增长率是指保证老年人晚年不出现财富短缺(或者将财富短缺发生的概率降到可接受的范围)所要求的最低年增长率。具体来讲就是，在给定的个人财富过程(包括初始财富、消费比例、金融市场

*张元萍，天津财经大学经济学院，邮政编码：300222，电子信箱：zhangyuanping@tjufe.edu.cn；王力平，天津财经大学经济学院，邮政编码：300222，电子信箱：wangpeng0630@sina.com。

本文受到天津财经大学研究生创新基金项目“创新型个人养老金融产品的设计研究”(项目编号：2012TCZ001)资助。感谢匿名审稿人的宝贵意见，文责自负。

条件等)和给定的置信度(95%)下,在死亡时刻之前,使财富值保持为正的最低财富增长率。也就是说,确定最小的财富增长率,使老年人的财富在τ(死亡时刻)内短缺的概率不超过5%。本文结合死亡率模型和财富变化的随机微分方程推导财富短缺概率,进而得到当财富短缺概率不超过5%时的必要财富增长率。在此基础上,计算不同老年群体在不同年龄上所需的必要财富增长率,为养老金融产品收益率的设计提供一个参考标尺。

二、文献综述

国外关于个人财富短缺风险的研究主要是用于讨论老年人的资产配置问题。从各类文献上来看,短缺概率可以定义为低于目标收益率或目标消费额的概率,或者是财富为零(本文所讲的财富短缺)的概率。Ho 等(1994)提出了对退休老人个人财富问题的重视,即如何利用各种金融工具配置资产才能获得维持合意消费水平的必要收益率。文章利用计算净现值的原理,将每年的消费按照生存概率加权,给定初始财富生成每期必要收益率;之后利用最小化收益率短缺概率(shortfall probability)的方法确定了资产配置比例。Albrecht 和 Raimond(2001)计算了不同折现率下生存年金的收益率,并将其作为目标收益率,以最小化收益率短缺概率为目标,讨论自年金化的资产组合选择。Milevsky(1998)将生存年金保证的每期消费作为财富过程中的固定消费额,计算当财富量低于固定消费额的消费短缺概率,并将发生消费短缺的时刻定义为最优年金化时间。Milevsky 等(1997)在研究退休人员在“高风险高收益”和“低风险低收益”的资产配置比例时,将老年人的财富短缺概率定义为退休人员存活至财富为零时刻的概率。文章在离散时间框架下,分别讨论了只考虑单一无风险资产和存在多个风险资产这两种情况,给定老年人的财富变动过程,计算出其财富为零时刻T^*,进而可以得出财富短缺概率。以上文献在计算财富短缺概率时,都是利用简单的数值算法,而 Huang 等(2004)以概率论和偏微分方程为理论基础,通过复杂的公式推导,开发了财富短缺概率的数学模型,利用矩匹配和共同单调近似方法计算了65岁退休人员的财富短缺概率,并得出当财富短缺概率控制在5%时,退休人员所需要的初始财富与消费额的比率。

在对财富短缺概率研究的基础上,很多学者将研究方向定位于在各种设定条件下最小化个人“破产风险”(life ruin risk)下的最优财富配置,如 Bayraktar 和 Young(2005)研究借款限制下最小化财富短缺风险的资产配置, Huang 和 Milevsky(2010)讨论了资产组合中配置 CPI 连结债券是否更有利于最小化老年人的财富短缺风险,等等。然而,对于财富短缺风险大小的度量却研究得很少。Milevsky(1998)利用消费短缺数量度量了短缺风险水平,本文利用收益率的形式对财富短缺风险水平进行度量。

国内有关老年人财富规划的文章较少,李志生等(2011)给出了财富短缺风险的量化模型,将财富短缺风险定义为年龄为t的人在财富效用小于零时仍然存活的概率,利用数值模拟的方法计算各年龄段发生财富短缺风险的概率。罗琰和杨招军(2011)基于最小化破产概率准则,研究了是否允许贷款投资风险资产情形下的最优投资策略问题。

研究财富短缺概率的过程中,预期寿命是通过构建死亡率模型描述的。Lee 和 Carter(1992)提出动态死亡率模型,将死亡率分解为年龄效应、时间效应和改进效应。在此基础上,Renshaw 和 Haberman(2006)提出了队列效应,将出生年作为另一个影响死亡率的因素加入模型。Currie(2006)对 RH 模型进行改进,并消除了模型解的不稳定问题。金博铁(2012)认为,

我国的死亡统计数据存在小样本和风险暴露不足问题，因此文章使用了贝叶斯方法通过MCMC抽样方法对Currie模型进行参数估计，得出我国死亡率的预测值。尚勤（2009）根据违约强度模型的构造原理建立了死亡强度模型，并对我国人口死亡强度进行预测。本文利用尚勤（2009）中构造的死亡强度对生存概率进行预测。

三、模型构建

必要收益率的计算是建立在财富短缺概率基础之上的。在既定的初始禀赋和消费比例下，财富短缺风险来自于预期寿命的不确定和金融资产收益率的不确定。本文根据金融市场上的收益率随机波动和老年人特有的消费模式推导财富变动满足的随机微分方程，得出财富首次为零时刻的概率，之后结合随机死亡率模型预测的未来人口存活率，得出老年人存活至财富为零时刻的财富短缺概率。

（一）财富变化过程

1. 财富增长过程

假定老年人将其全部财富都投入金融市场（单一市场或投资组合）以期获得资金增值来应对晚年的消费支出。为分析简便又不失一般性，设金融市场上收益率的波动满足一个简单的随机微分方程：

$$dR = rdt + \eta dW^r(t) \tag{1}$$

其中，r 为收益率均值，表示财富的平均增长率。η 表示收益率的标准差。$W^r(t)$ 为标准布朗运动。

2. 老年消费函数

以往文献中消费函数的设定主要有三种方式：第一，常数消费量，Milevsky 等（1997）设定了一个每年的常数消费 C_0，其与初始财富 X_0 成一定比例。第二，比例消费量，Erhan 和 Young（2005）中除了分析常数消费量之外，还分析了比例消费量，即当期的消费量是当期财富的一个固定比例，$cX(t)$。第三，经典消费函数，即 $C_0 + cX(t)$。

然而，以上三种消费函数都不完全符合老年人的消费特征：首先，老年人因其每期的收入来源较少（甚至没有），整个财富过程呈下降的趋势，其会更多地为未来的消费做打算，所以各期的基本消费都会保持在一个大致固定的水平，因此比例消费函数是不恰当的。其次，老年人的消费受物价指数的影响非常明显，因此在建立消费函数时，应对每一期的消费用当期的CPI进行调节。最后，老年人消费的一个很大的特征就是，随着年龄的增大，医疗护理费占总消费的比重越来越大，尤其是75岁之后，大部分的消费支出都是用于医疗护理。

综上，老年消费函数为：

$$C_t = C_0\ (1 + cpi)^t + k(t)C_0\ (1 + cpi)^t \tag{2}$$

其中，C_0 是初始消费额，表示退休人员的基本消费的固定水平，不同老年群体的初始消费额不同。cpi 表示消费物价指数的环比上涨幅度。$k(t)$ 表示每年用于医疗护理的费用与基本消费的比例，是时间 t 的增函数。

3. 财富变动过程

综合财富的增值和消费过程，可以推出老年人的财富变动过程，用随机微分方程表示为：

$$dX_t = X_t dR + Ydt - C_t dt = (X_t r + Y - C_0\ (1 + cpi)^t + kC_0\ (1 + cpi)^t)dt + X_t \eta dW^r(t) \tag{3}$$

(3)式中,X_t 表示当期财富总量,Y 表示每期的收入,包括退休金、子女的赡养费或者继续工作的工资收入等,设为固定值。根据上述微分方程,给定初始财富、消费函数等参数值,在 τ 时刻财富为零的概率为:

$$P(\tau)=P(X_\tau=0\mid X_0,C_0,Y,k,cpi)$$

当 X_0,C_0,Y,k,cpi 等外生变量固定时,财富为零的概率取决于金融资产的收益情况。

如果老年人将所有财富仅投资于无风险资产,即 $\eta=0$,那么(3)式就可以写为:

$$dX_t=X_tdR+Ydt-C_tdt=(X_tr+Y-C_0\,(1+cpi)^t-kC_0\,(1+cpi)^t)\,dt \tag{4}$$

解一阶微分方程得:

$$X_t=xe^{rt}-\frac{Y}{r}-\frac{(1+k)C_0\,(1+cpi)^t\ln(1+cpi)}{1-r\ln(1+cpi)} \tag{5}$$

根据(5)式,在各种参数确定的情况下,便可以准确计算发生财富短缺的时刻 τ。但实际市场中仅存在一个较低的无风险收益率,不可能达到规避财富短缺风险的水平。当投资于风险资产(或资产组合)时,收益率的波动是不可避免的,$\eta\neq0$,不同的 η 会导致不同的财富变化过程,进而会产生不同的财富为零时刻 τ 的分布,本文结合老年人的风险偏好及市场上的国债收益率,在实证部分将 η 设为定值,单独研究不同收益率下 τ 的分布。

(二)死亡率模型

设年龄为 x 岁的老年人未来存活 t 年的概率为${}_tp_x$,定义为生存概率:

$$S_x(t)={}_tp_x=E[e^{-\int_0^t\lambda_x(u)du}],t=1,2,3\cdots \tag{6}$$

其中,$\lambda_x(t)$为 x 岁人口在第 t 年的死亡强度,根据尚勤(2009),$\lambda_x(t)$服从带跳跃的 OU 过程(均值回复扩散过程):

$$d\lambda(t)=a\lambda(t)dt+\sigma dW^\lambda(t)+dJ(t) \tag{7}$$

式中 $W^\lambda(t)$ 表示标准布朗运动,本文假定死亡率与金融资产收益率相互独立,因此 $W^\lambda(t)$与 $W^r(t)$不相关。$J(t)$是纯复合泊松跳跃过程,泊松到达强度为 $l>0$,跳跃幅度服从指数分布,其均值$\mu<0$。假设布朗运动、泊松过程和跳跃过程相互独立。

生存指数解的形式为:

$$S_x(t)=\exp[A(t)+B(t)\lambda_x(0)] \tag{8}$$

其中,

$$\begin{aligned}A(t)&=\left(\frac{\sigma^2}{2a^2}+\frac{l\mu}{a-\mu}\right)t-\frac{\sigma^2(4e^{at}-e^{2at}-3)}{4a^3}-\frac{l}{a-\mu}\ln\left(1-\frac{\mu}{a}+\frac{\mu}{a}e^{at}\right)\\B(t)&=\frac{1}{a}(1-e^{at})\text{①}\end{aligned} \tag{9}$$

第四部分将会给出参数的具体估计值,代入(9)式即可得出年龄为 x 岁的人在未来任何一年的存活率。

(三)老年人财富短缺模型

退休人员财富短缺概率即在生存期间财富为零的概率,假定退休年龄为 60 岁,则 x 岁的退休人员在未来 t 年内发生财富短缺的概率可以表示为:

---

①尚勤,2009:《死亡率关联债券的定价模型与实证研究》,大连理工大学博士学位论文,第 70－72 页。

$$P_{LR}(x,t) = {}_tp_x \times p(\tau = 60 + t) = e^{-\int_0^t \lambda_x(s)ds} \times p(\tau = 60 + t) \qquad (10)$$

其中,${}_tp_x$ 表示 x 岁的人在未来 t 年内存活的概率,$\lambda_x(s)$ 表示年龄为 x 的人在未来第 s 年的死亡强度。τ 表示财富首次为零的时刻,$p(\tau = 60 + t)$ 由财富变化过程求解得出。从模型本身来看,财富短缺概率由相互独立的两部分构成:存活概率可以根据死亡率模型得到,不受外生变量的影响,而财富为零时刻的概率取决于资产收益率的变动,因此退休人员的财富短缺概率是死亡率和资产收益率两部分相互作用的结果。

根据以上模型计算退休人员的财富短缺概率,根据大数定律,本文的主要目的就是要确定当财富短缺概率控制在5%时,退休人员所需的必要收益率。

四、实证分析

本文利用死亡率模型对我国养老金业务男性的生存概率进行预测,并与生命表中的数据进行比较,发现人口存活率有很大改善。财富为零时刻的概率很难求出显示解,因此本文根据退休人员的基本收入-消费特征划分三类老年消费群体并设定各个状态变量的值(如初始财富、消费函数中的各个参数),对财富变动过程满足的随机微分方程进行数值模拟分析:首先,比较在不同财富增长率水平下基准群体首次财富短缺时刻 τ 的分布,显示财富增长率与财富短缺概率之间的负向关系;其次,以80岁的基准群体为例,研究财富短缺风险发生的概率与财富增长率之间的关系,并计算当财富短缺概率为5%时的财富增长率;最后比较三类老年群体必要财富增长率的异同,得出财富短缺风险的群体差异性。

(一)死亡率预测

死亡率模型中 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的参数求解可以参照尚勤(2009)的估计值,文章利用《中国人寿保险业经验生命表(2000-2003)》中养老金业务男表的数据估计出参数值为:$\mu = -0.00038$,$a = 0.07698$,$l = 0.00256$,$\sigma = 0.00031$①。目前男性的退休年龄为60岁,因此取初始年龄为60,$\lambda_{60}(0) = -\ln p_{60} = -\ln 0.993 = 0.007025$。因此,可以计算出60岁男性在未来45年的生存概率 $S_{60}(t)$,并与利用经验生命表计算的${}_tp_x = (1-q_x)(1-q_{x+1})(1-q_{x+2})\cdots(1-q_{x+t-1})$进行比较,如图1所示。

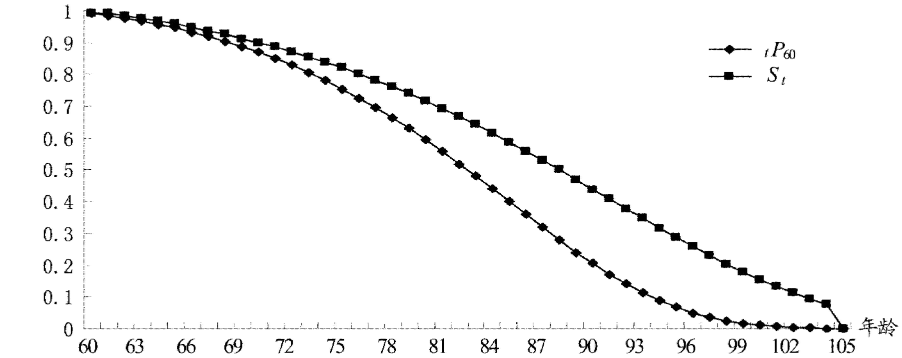

图1 60岁男性生存概率比较

①尚勤,2009:《死亡率关联债券的定价模型与实证研究》,大连理工大学博士学位论文,第77页。

从图1可以看出,模型预测的生存概率在每一个年龄都大于生命表中的生存概率,死亡率改善是一个不争的事实。比较两条曲线的斜率变化可以看出,预测的生存概率下降的速度更慢,两条曲线之间较大的距离出现在88~92岁之间,对于寿险公司来说这段期间的整体财富短缺风险最大。

(二)财富变动过程的参数设定

财富短缺风险因人而异,根据财富短缺模型,本文设定三组状态变量的值,并比较三类消费群体间财富短缺风险的差别,三类群体的消费情况比较见表1。

基准群体:初始财富值 $X_0=150\ 000$ 元,即退休前为养老准备的财富量;根据李志生和刘恒甲(2010)的预测,新生人口的期望寿命为75岁,因此这类老年人为平衡自己未来15年的消费,设定初始消费额 $C_0=10\ 000$ 元,每年的平均额外收入 $Y=6\ 000$ 元,每年的物价上涨幅度取近十年CPI的环比增长率均值0.025①,每年的医药护理费所占比例设定为 $k(t)=\frac{1}{15}t=0.067t$。由于老年人的风险规避系数高,因此,将投资于金融市场的资产收益率的波动控制在一定范围内,设定为近十年来一年期国债收益率的标准差。根据李志生等(2011)的测算,本文假定标准差为15%。

遗赠群体:即存在遗赠需求的群体。由于存在遗赠需求,在其他条件不变的情况下,其生活相对节俭,初始消费额会小于基准群体,取 $C_0=7\ 500$ 元。

独居群体:定义为60岁后没有收入来源,也不存在遗赠需求的老年群体。这类群体生活更节俭,初始消费额设定为 $C_0=6\ 000$ 元。

表1　三类不同群体的财富过程参数

参数	X_0(元)	C_0(元)	Y(元)	cpi	η	$k(t)$
基准群体	150 000	10 000	6 000	0.025	0.15	$0.067t$
遗赠群体	150 000	7 500	6 000	0.025	0.15	$0.067t$
独居群体	150 000	6 000	0	0.025	0.15	$0.067t$

(三)数值模拟分析

1. 首次财富短缺时刻 τ 的分布

首次财富短缺时刻 τ 是由财富变化过程确定的,满足 $X_{\tau-60}\leqslant 0$。τ 为首次出现财富为零的时刻,消费习惯和每期收入都确定的情况下,τ 的大小直接取决于收益率的大小和波动情况。当收益率波动控制在一定范围(15%)时,τ 的分布完全取决于财富增长率水平。本文利用数值模拟计算 τ 的分布并比较当 r 取不同值时(0.03~0.08)概率分布的差异。

在模拟财富变化过程的随机微分方程(3)式之前,先利用Matlab7.0生成布朗运动随机过程 $dW=\varepsilon\sqrt{dt}$,其中 ε 为标准正态分布随机数;之后设定参数值,并计算当财富增长率 $r=0.03,0.04,\cdots,0.08$ 时的首次财富短缺时刻 τ;对模型(3)进行5 000次模拟计算,得到不同利率水平下 τ 的累计分布函数。

以基准群体为例,模拟结果如图2所示。

从图2中可以看出,对基准群体老年人来说,在70岁之前,发生财富短缺的概率几乎为零,75岁之后发生财富短缺的概率逐渐显现。当 $r=0.03$ 时,82岁以前发生财富短缺的概率已

①作者根据国家统计局网站公布数据计算而得。

经达到了 50% 以上，也就是说，有一半以上的老年人暴露在财富短缺风险之下。当 $r=0.04$ 时，82 岁以前发生财富短缺的概率为 39.92%，比例明显降低；当 $r=0.08$ 时，82 岁以前发生财富短缺的概率仅为 8.96%。可见，随着财富增长率的变大，发生财富短缺的时刻在不断推迟，从这个趋势来看，当 r 足够大时，将不会发生财富短缺的情况。按照模拟结果分析，当 $r=0.08$ 时，不发生财富短缺的概率达到了 58.7%。此外，从分布函数的斜率来看，财富短缺发生的时刻集中在 86～92 岁之间，在这个年龄段出现财富短缺风险的可能性最大。

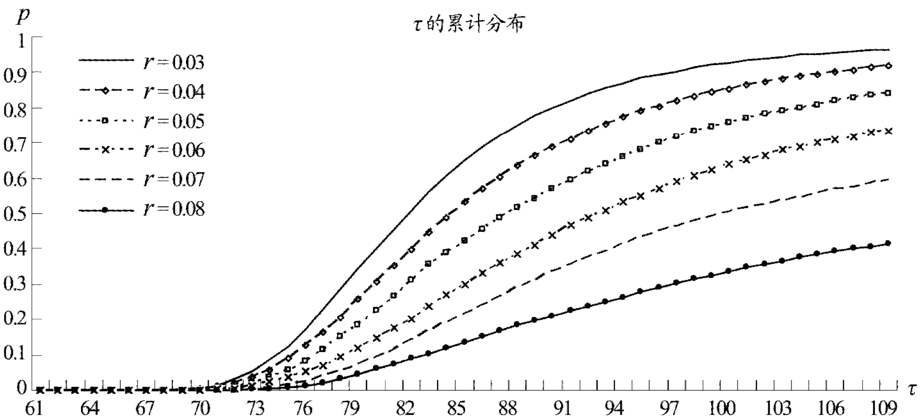

图 2　首次财富短缺时刻的分布

2. 财富短缺风险的测度

本文利用最低财富增长率度量财富短缺风险，就是要确定多大的财富增长率能使发生财富短缺风险的概率低于 0.05。首先，我们可以通过进一步的模拟计算，观察最低财富增长率的变动导致财富短缺风险概率变动的情况。以 $\tau=80$ 的基准群体为例，设定 r 从 0.03 变化到 0.1，步长为 0.001，计算每个取值下的 $p(\tau=80)|_{r=r_i}$；计算 $S_{60}(20)$，并进一步计算 $P_{LR}(60,20)|_{r=r_i}=S_{60}(20)\times p(\tau=80)|_{r=r_i}$，确定 r^* 使 $P_{LR}(60,20)|_{r=r^*}\leqslant 0.05$。

计算结果如图 3 所示。

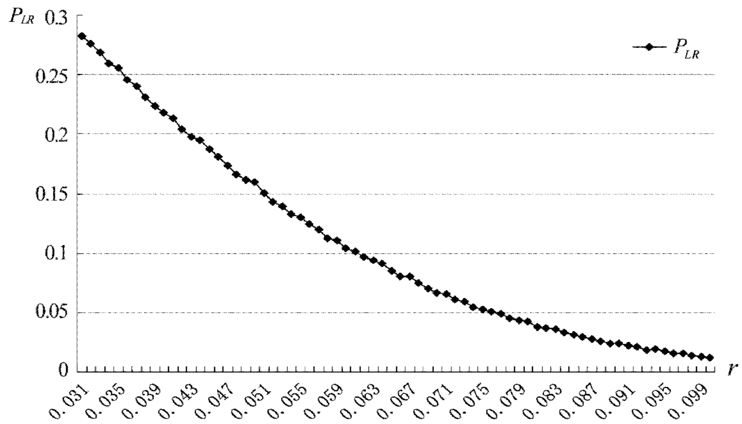

图 3　$P_{LR}(60,20)$ 随 r 的变动情况

图 3 显示了 60 岁基准群体在 80 岁时发生财富短缺风险的概率随财富增长率的变大而降低。如果将财富全部存入银行，以 3% 的年利率计算，80 岁时发生财富短缺风险的概率为

0.28,也就是说,四分之一以上的人会暴露在财富短缺风险之下。如果投资于金融市场上的资产组合每年的财富增长率达到10%,则发生财富短缺风险的概率仅为0.01,几乎完全可以避免财富短缺风险;按照小概率事件原理,我们设定可接受的概率为0.05时,要求的最低财富增长率为 $r^* = 0.077 = 7.7\%$。

按照以上步骤,从75岁($t = 15$)开始,设定 r 的大致取值区间为[0.04,0.12],步长为0.0001,计算基准群体每一年发生财富短缺的概率 $p(\tau = 60 + t)|_{r = r_i}$,直至最大年龄105岁;之后分别计算每一年发生财富短缺风险的概率 $P_{LR}(60, t)|_{r = r_i} = S_{60}(t) \times p(\tau = 60 + t)|_{r = r_i}$,确定 r^* 使 $P_{LR}(60, t)|_{r = r^*} \leq 0.05$。计算结果见表2。

表2　　财富增长率 r

年龄	r	年龄	r	年龄	r
75	0.048	86	0.091	97	0.089
76	0.056	87	0.0923	98	0.088
77	0.062	88	0.0927	99	0.086
78	0.068	89	0.0934	100	0.083
79	0.072	90	0.0938	101	0.08
80	0.077	91	0.094	102	0.076
81	0.08	92	0.0941	103	0.07
82	0.083	93	0.0936	104	0.063
83	0.086	94	0.0931	105	0.051
84	0.088	95	0.092		
85	0.09	96	0.091		

资料来源:作者计算。

表2说明了在75岁以后的每个年龄上,能够保证发生财富短缺风险概率低于0.05时所要求的最低财富增长率。以75岁为例,基准群体在75岁之前(包含75岁)不发生财富短缺风险所要求的最低年财富增长率为4.8%。随着年龄的增大,要求的最低财富增长率也不断提高,但提高速度越来越慢,直到92岁时,达到了最大值9.41%;之后要求的财富增长率不断下降。最低财富增长率的变化趋势说明了每个年龄上财富短缺风险水平的变化。92岁之前,财富短缺风险越来越大,这主要来源于手中的财富越来越难以满足当期的消费,因此需要越来越高的财富增长率;92岁之后,财富短缺风险降低主要是因为存活率的不断下降,在未来较短的余命里不需要过高的财富增长率。

3. 三种不同群体财富短缺风险的比较

重复以上步骤,本文分别计算基准群体、遗赠群体和独居群体的最低财富增长率。三者的比较如图4所示。由于遗赠群体 $X_0/C_0 = 20$ 且每年有收入来源,因此,其财富短缺风险从80岁($t = 20$)开始计算。图中 r、br 和 gr 分别表示基准群体、遗赠群体和独居群体的最低财富增长率曲线。

三条曲线的共同之处是都呈倒U型走势,而且出现财富短缺风险最大值都是在90~92岁左右:基准群体在92岁出现财富短缺风险最高峰,遗赠群体也是在92岁财富短缺风险最大,而独居群体在90岁就达到了财富短缺风险最大值。从最低收益率区间来看,基准群体在75~100岁的最低财富增长率区间为[4.8%,9.41%],遗赠群体的最低财富增长率区间为[3.2%,6.3%],独居群体的最低财富增长率区间为[5.8%,9.55%]。很显然,与基准群体比较,遗赠群体每期消费较少,因此总体上财富短缺风险的水平远低于基准群体,而且出现财富短

缺风险高峰的时间也不会早于基准群体;而独居群体,因其没有收入来源,虽然每期消费额都低于基准群体,但其财富短缺风险仍偏高于基准群体,而且更早地达到了财富短缺风险的高峰。

财富短缺风险最低收益率的倒U型态势,说明了财富短缺风险并不是一直随着老年人年龄的增大而变大的,而是到了一定年龄之后,风险逐渐变小。这主要是因为,财富短缺风险是由两个方面造成的:一是财富减少,二是高存活率。在较低年龄阶段,存活率较高,财富的不断减少是财富短缺风险上升的主要原因;在高龄阶段,存活率较低,也就是说,很大可能是高龄老人在财富为零之前就已经死亡,因此,存活率的降低是造成财富短缺风险下降的主要因素。

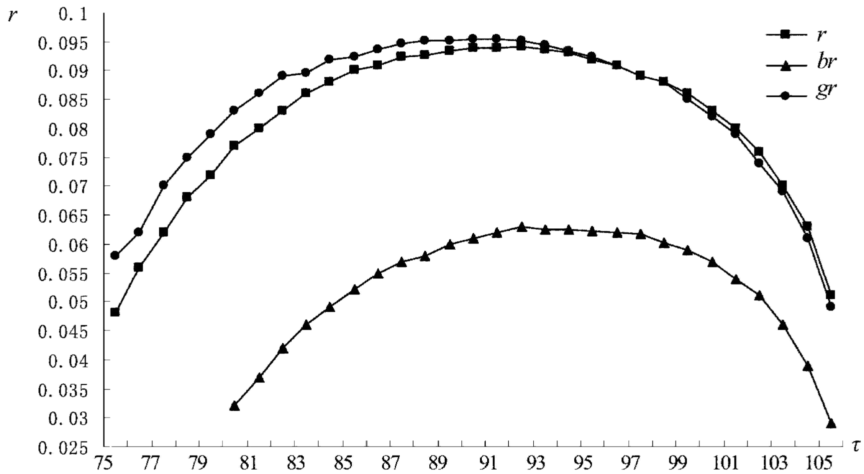

图4　三种群体财富短缺风险比较

(四)参数敏感性分析

在财富变动过程设定的参数中,初始消费－财富比和医药护理费比例均根据新生人口的期望寿命(75岁)设定,而影响到财富短缺风险的主要经济参数为每年的消费物价指数 *cpi* 和国债收益率标准差 η。因此,本文以基准群体为例针对这两个经济参数进行敏感性分析。

1. 消费物价指数的变化对必要收益率的影响

根据(2)式和(3)式,消费物价指数的变化影响到财富变化过程中的消费部分。从经济意义上来讲,CPI越高,每年的消费量越高,发生财富短缺的可能性也越高,因此需要更高的必要收益率。保持其他参数不变,*cpi* 的变动引起的必要收益率的变化如图5所示。

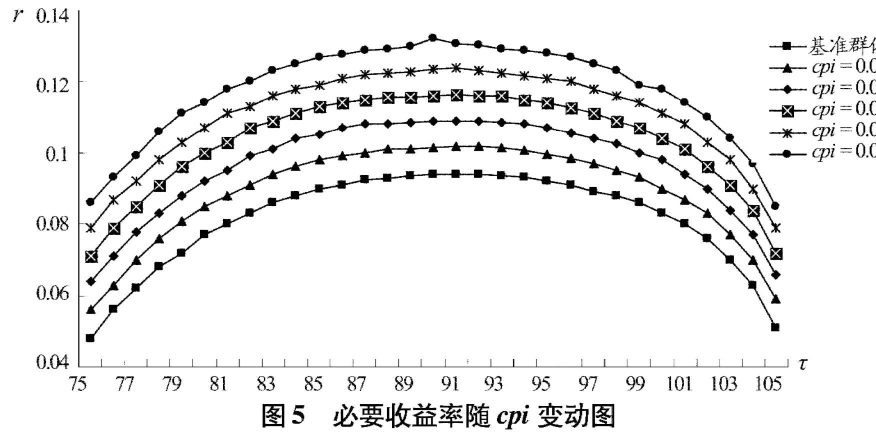

图5　必要收益率随 *cpi* 变动图

随着 cpi 的增高，r 也不断上升，而且财富短缺风险高峰年龄也逐渐提前至 90 岁。然而，当 cpi 从 0.025 逐渐上升到 0.05 时，r 的平均上升幅度逐渐下降，如图 6 所示。这说明，必要收益率与 cpi 之间存在正相关关系，但这种正向作用随 cpi 的上升而减小，即消费物价指数对老年人财富短缺风险的影响是有限度的。

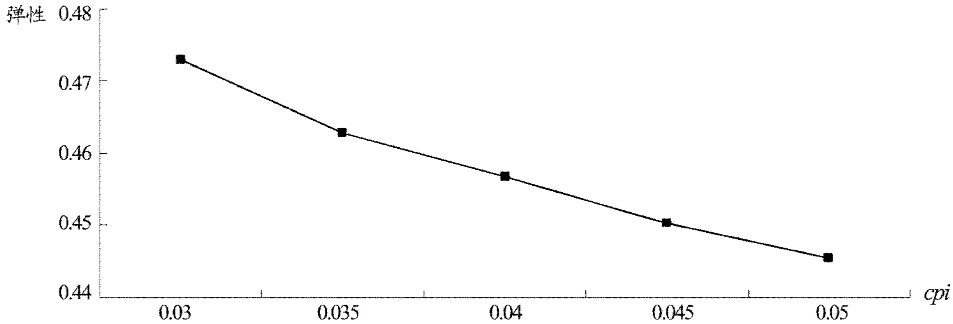

图 6　必要收益率的 cpi 弹性

2. 收益波动率的变化对必要收益率的影响

根据(1)式和(3)式，收益波动率的变化影响到财富变化过程中的财富增长部分。从经济意义上来讲，收益波动率越大，财富量的不确定性越大，发生财富短缺的可能性也越高，因此必要收益率也越高。保持其他参数不变，η 的变动引起的必要收益率的变化如图 7 所示。随着 η 的增高，r 也不断上升，而且财富短缺风险高峰年龄也逐渐提前至 88 岁。然而，当 η 从 0.15 逐渐上升到 0.25时，r 的平均上升幅度逐渐上升，如图 8 所示。这说明，必要收益率与 η 之间存在正相关关系，但这种正向作用随 η 的上升而增大，即收益波动率对老年人财富短缺风险的影响是不断扩张的。

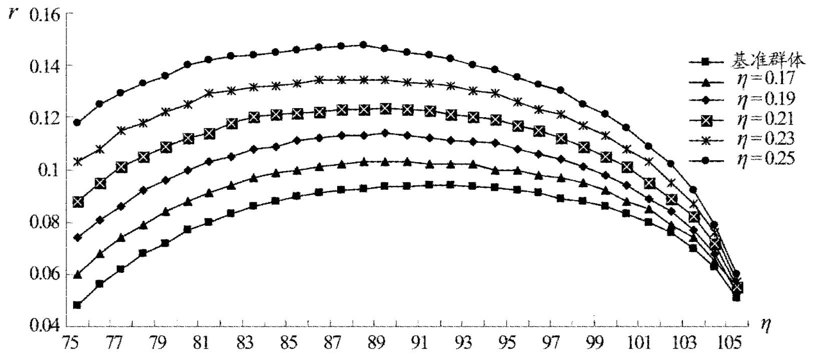

图 7　必要收益率随 η 变动图

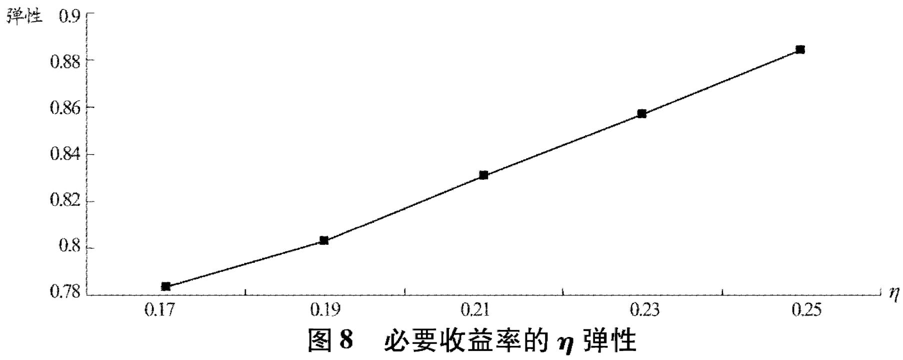

图 8　必要收益率的 η 弹性

五、结论及启示

老年人是一个特殊的消费群体，这部分群体的财富值处于负增长阶段，而且受通货膨胀的侵蚀影响较大，因此，为保证其自身的晚年消费，除了降低消费支出以外，更应寻求财富的增值。如果将财富仅作为银行存款，虽然基本上不存在市场波动带来的风险，但财富增值的空间小，发生财富短缺风险的可能性加大。如果投资于市场上的金融产品（或产品组合），在要求收益率的同时就不得不考虑市场波动，所以本文利用随机微分方程的形式定义了老年人的财富变化过程，并结合生存概率推导出财富短缺概率。

本文利用必要财富增长率作为财富短缺风险的量化指标，即使老年人的财富在 τ（死亡时刻）内短缺的概率小于 5% 的最低财富增长率。李志生等（2011）提出应划分不同的社会群体，分别研究其财富短缺风险会更有意义。因此本文从消费的角度划分了三类老年群体：基准群体、遗赠群体和独居群体，并比较这三类群体的财富短缺风险特征。遗赠群体面临的财富短缺风险水平低于基准群体，独居群体的财富短缺风险水平最高，而且财富短缺风险高峰出现的时间最早。老年人的财富短缺概率受经济参数的影响不容忽视，消费物价指数和国债收益波动率的增大均加大了老年人的财富短缺风险，而消费物价指数的正向作用不断收敛，国债收益率的波动会对老年人的财富产生扩张性的侵蚀。

本文利用最低财富增长率来度量财富短缺风险主要基于以下两种考虑：第一，金融领域很多的风险如利率风险、汇率风险、流动性风险、市场风险等等都是以收益率的形式表示的，因此，可以借鉴金融风险管理的理论与技术有效管理财富短缺风险。第二，要求的最低财富增长率为设计养老金融产品过程中收益率的设定提供了参考标尺。投资者按照自己的寿命预期选择不同收益率的产品，但产品的收益率除了包含财富短缺风险要求的最低收益率之外还要涵盖如利率风险等其他的金融风险。财富短缺风险最低收益率与传统的利率期限结构的表现形式不同，呈倒 U 型态势，即预期寿命为 82 岁的基准群体老年人所要求的最低财富增长率与预期寿命为 100 岁的基准群体老年人所要求的增长率大致相当，这就要求在产品收益率设定的过程中还要综合考虑利率期限结构等因素，以更好地对冲养老过程中的风险。

参考文献：

1. 金博轶，2012：《动态死亡率建模与年金产品长寿风险的度量——基于有限数据条件下的贝叶斯方法》，《数量经济技术经济研究》第 12 期。
2. 李志生、刘恒甲，2010：《Lee－Carter 死亡率模型的估计与应用——基于中国人口数据的分析》，《中国人口科学》第 3 期。
3. 李志生、吕勇斌、刘恒甲，2011：《长寿风险的识别与量化研究：来自中国的数据》，《统计与决策》第 16 期。
4. 罗琰、杨招军，2011：《最小化破产概率的最优投资》，《管理科学学报》第 5 期。
5. 尚勤，2009：《死亡率关联债券的定价模型与实证研究》，大连理工大学博士学位论文。
6. Albrecht, P., and M. Raimond. 2001. "Self - Annuitization, Ruin Risk in Retirement and Asset Allocation: The Annuity Benchmark." Working Paper, University of Mannheim.
7. Currie, I. D. 2006. "Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P - splines." Talk Given at the Institute of Actuaries. http://www.researchgate.net/publication/240247868_Smoothing_and_Forecasting_Mortality_Rates_with_P - splines.

8. Higham, Desmond J. 2001. "An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations." *SIAM Review*, 43(3): 525－546.

9. Erhan, Bayraktar, and Virginia R. Young. 2005. "Minimizing the Probability of Lifetime Ruin under Borrowing Constraints." Working Paper, Department of Mathematics, University of Michigan.

10. Ho, K., M. A. Milevsky, and Chris Robinson. 1994. "Asset Allocation, Life Expectancy and Shortfall." *Financial Services Review*, 3(2): 109－126.

11. Huang, H., and M. A. Milevsky. 2010. "Lifetime Ruin Minimization: Should Retirees Hedge Inflation or Just Worry about It?" Working Paper, Schulich School of Business Finance Area, York University.

12. Huang, H., M. A. Milevsky, and J. Wang. 2004. "Ruined Moments in Your Life: How Good Are the Approximations?" *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(3): 421－447.

13. Lee, R. D., and L. R. Carter. 1992. "Modeling and Forecasting U. S. Mortality." *Journal of the American Statistical Association*, 87(419): 659－675.

14. Milevsky, M. A. 1998. "Optimal Asset Allocation Towards the End of the Life Cycle: To Annuitize or Not to Annuitize?" *The Journal of Risk and Insurance*, 65(3): 401－426.

15. Milevsky, M. A., K. Ho, and C. Robinson. 1997. "Asset Allocation via the Conditional First Exit Time or How to Avoid Outliving Your Money." *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 9(1): 53－70.

16. Renshaw, A. E., and S. A. Haberman. 2006. "Cohort－Based Extension to the Lee－Carter Model for Mortality Reduction Factors." *Insurance Mathematics and Economics*, 38(3): 556－570.

The Measurement of Wealth Shortfall Risk under Stochastic Life Span

Zhang Yuanping and Wang Liping

(Economics School, Tianjin University of Finance and Economics)

Abstract: Under the assumption of the stochastic life expectancy and random yield of financial assets, we use the necessary wealth growth rate as a measure of the retirees' wealth shortfall risk. The necessary wealth growth rate is the lowest wealth growth rate that, in the given process of personal wealth and under the given confidence level (95%), during the given time period (before death moment), that makes the personal wealth keep positive. Using stochastic mortality model and personal wealth process, we deduce retirees' wealth shortfall probability, and then use the numerical algorithm to calculate the necessary wealth growth rate when the wealth shortfall probability is lower than 5%. Finally, from the perspective of consumption, we divide the old into three groups: the basic group, the bequest group, and the lonely group; then, we compare the characteristics of the wealth shortfall risk among three elderly groups. After the sensitiveness analysis of parameters, we find that CPI and volatility of government bonds exacerbate retirees' wealth shortfall risk. Our work figures out the necessary wealth growth rate, and provide references for setting yields of pension financial products.

Key Words: Wealth Shortfall Risk; Mortality Model; Stochastic Differential Equations; Wealth Growth Rate

JEL Classification: G23

（责任编辑：赵锐、彭爽）