马克思经济增长模型中的特征值及其理论蕴涵

陶为群 陶 川*

摘要：为了借鉴现代经济增长模型的数量方法对马克思经济增长理论的研究，本文基于马克思两部类经济增长模型的特殊结构，将特征值方法探索运用于对其的研究。通过解析两个部类积累相互约束的关系，以及每个部类新创造价值增长与本部类积累和两个部类结构参数之间的关系，获得两个部类新创造价值的唯一特征值，也就是唯一的均衡发展速度。给出与特征值对应的全社会和每个部类积累率算式，指出产生特征值的模型结构条件，以及特征值的最大值。从经济均衡和非均衡增长的视角，通过与哈罗德经济增长模型的对比分析，阐述了马克思两部类经济增长模型中的特征值的理论蕴涵。最后引用和借鉴《资本论》中的举例，对所论析做了算例验证。

关键词：马克思经济增长模型 特征值 均衡发展 结构参数

一、引言

特征值是线性代数中的一个重要内容，较普遍地应用于研究线性多部门经济模型经济增长的部门均衡性。从经济意义上，特征值可以看作多部门均衡并且稳定的发展速度。马克思《资本论》第二卷第二十一章中的第一例，主要例示了两个部类的总产品和新创造价值都以相同而且固定不变的“常量”速度增长情形，这与特征值方法适用的情形实际上相同，但那里没有给出“常量”增长速度的一般算式和获得该增长速度的条件。① 张忠任(2006)研究马克思再生产体系的调节问题时，提出了一个从基年开始两个部类的增长率就相同并且一直保持不变，即均衡扩大再生产的经济增长率表达式，实际上也与特征值方法能够获得的结果基本一致，但他没有说明这个均衡扩大再生产的经济增长率是如何被推导出来以及得以产生的条件。② 马克思例示计算中的“常量”经济增长率数值，恰好符合张忠任所提出的这一经济增长率表达式。陶为群和陶川(2010)在研究马克思两部类经济增长模型中的储蓄与劳动就业关系时，给出了更为一般的两部类均衡扩大再生产的经济增长率表达式，并且指出全社会资本－产出比率保持不变，可以成为两个部类的新创造价值都以固定不变的“常量”速度增长的条件。③本文基于这些研究结果的共性内容，将特征值探索运用于研究马克思两部类经济增长模型，以期借鉴现代经济增长模型的数量方法丰富对马克思经济增长理论的研究。

二、马克思经济增长模型的特殊结构和约束关系式

马克思经济增长理论和模型建立在劳动价值论的基石之上，含有价值构成原理和实物构成原理。价值构成原理在社会产品价值上的体现是，产品的全部价值由生产它所消耗的生产资料价值、劳动力价值和剩余

* 陶为群，中国人民银行南京分行，邮政编码：210004，电子信箱：taoweiqun@yahoo.com.cn；陶川，北京大学光华管理学院，邮政编码：100871。

感谢匿名审稿人提出的中肯和建设性意见。

①马克思，2004《资本论》，中译本，第2卷，人民出版社，第569－590页。

②张忠任，2006《数理政治经济学》，经济科学出版社，第159－176页。

③陶为群、陶川，2010《马克思经济增长模型中的储蓄与劳动就业关系》，《当代经济研究》第7期。

价值三部分构成。实物构成原理在社会生产上的体现是,划分成分别生产生产资料、生产消费资料的两大部类。经济增长以社会总产品的实现为前提,这个实现过程必须通过两个部类之间的产品等价交换完成。资本积累是剩余价值转化成资本,是经济增长的源泉。马克思两部类经济增长模型设定了经济增长过程中各部类的资本有机构成和剩余价值率不变,以及不变资本的周转周期为 1年。由于设定了各部类的资本有机构成和剩余价值率不变,那么在每个部类内部,不变资本、可变资本、剩余价值、新创造价值之间都保持着固定不变的关系,因而两个部类之间任一个对应部分之间的比例关系,都足以表现整个部类之间的比例关系。陶为群和陶川(2010)提出,为了便于和现代经济增长模型比较,用两个部类新创造价值之间的比例关系从总体上反映两个部类之间的比例关系。分别以 C、V、M、Y 表示不变资本、可变资本、剩余价值、新创造价值,则 $Y=V+M$;以下标Ⅰ、Ⅱ表示生产资料部类和消费资料部类,上标 (t) 表示第 t 年。用 $h=C/V$ 表示资本有机构成,e、μ 分别表示剩余价值率、剩余价值积累率,这些结构参数再加上 t 年两个部类新创造价值之间的比例关系 $\varphi^{(t)}=Y_{\mathrm{II}}^{(t)}/Y_{\mathrm{I}}^{(t)}$,就共同完整地反映了马克思两部类经济增长模型的特殊结构。①

由于马克思两部类经济增长模型中设不变资本的周转周期为 1年,因而固定资产折旧已经计入生产资料消耗之中,当年新创造价值对应于统计上的国内生产净值。对确定了含义的字母前面加符号 Δ 表示增量。t 年第Ⅰ部类的总产值 $(C_{\mathrm{I}}^{(t)}+V_{\mathrm{I}}^{(t)}+M_{\mathrm{I}}^{(t)})$ 实物构成是生产资料,扣除补偿本部类和第Ⅱ部类的生产资料消耗 $C_{\mathrm{I}}^{(t)}$ 和 $C_{\mathrm{II}}^{(t)}$,剩余的 $(V_{\mathrm{I}}^{(t)}+M_{\mathrm{I}}^{(t)}-C_{\mathrm{II}}^{(t)})$ 都必然用于本部类和第Ⅱ部类新增生产资料 $\Delta C_{\mathrm{I}}^{(t)}$ 和 $\Delta C_{\mathrm{II}}^{(t)}$。因此就存在关系式:

$$\Delta C_{\mathrm{I}}^{(t)}+\Delta C_{\mathrm{II}}^{(t)}=V_{\mathrm{I}}^{(t)}+M_{\mathrm{I}}^{(t)}-C_{\mathrm{II}}^{(t)} \qquad \Delta C_{\mathrm{I}}^{(t)},\ \Delta C_{\mathrm{II}}^{(t)}\geqslant 0 \tag{1}$$

(1)式中当 $\Delta C_{\mathrm{I}}^{(t)}$、$\Delta C_{\mathrm{II}}^{(t)}$ 都等于 0的时候,就是简单再生产状况。马克思在《资本论》中已经指出,这种补偿和新增使用,是经过部类内部以及两个部类之间的产品交换(交易)完成。②

由于马克思两部类经济增长模型中设定每个部类有机构成保持不变,因而每个部类的边际有机构成与有机构成相同,即 $\Delta C_j^{(t)}/\Delta V_j^{(t)}=C_j^{(t)}/V_j^{(t)}=h_j\,(j=\mathrm{I},\mathrm{II})$。积累 $\mu_j^{(t)}M_j^{(t)}$ 分解为 $\Delta C_j^{(t)}$ 和 $\Delta V_j^{(t)}$ 两个部分时,必然按照 $\Delta C_j^{(t)}$、$\Delta V_j^{(t)}$ 分别占其中 $h_j/(1+h_j)$ 和 $1/(1+h_j)$ 的份额。把这个条件代入(1)式,得出两个部类积累 $\mu_j^{(t)}M_j^{(t)}$ 相互约束的关系式:

$$\sum_{j=\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}[h_j/(1+h_j)]\mu_j^{(t)}M_j^{(t)}=V_{\mathrm{I}}^{(t)}+M_{\mathrm{I}}^{(t)}-C_{\mathrm{II}}^{(t)} \tag{2}$$

不难看到,此约束关系式的产生,与马克思两部类经济增长模型的特殊结构直接相关。

三、两个部类经济发展的特征值及其唯一性

全社会的积累是两个部类积累之和,因而有关系式:

$$\mu_{\mathrm{I}}^{(t)}M_{\mathrm{I}}^{(t)}+\mu_{\mathrm{II}}^{(t)}M_{\mathrm{II}}^{(t)}=\mu^{(t)}(M_{\mathrm{I}}^{(t)}+M_{\mathrm{II}}^{(t)}) \tag{3}$$

(3)式与(2)式联立,并利用关系式 $Y_j^{(t)}=(1+e_j)V_j^{(t)}=(1+e_j)M_j^{(t)}/e_j\,(j=\mathrm{I},\mathrm{II})$ 解出两个部类积累率:

$$\begin{cases}\mu_{\mathrm{I}}^{(t)}=\dfrac{1+h_{\mathrm{I}}}{e_{\mathrm{I}}(h_{\mathrm{I}}-h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{II}})}\left\{(1+h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{I}})[1+e_{\mathrm{II}}-h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}]-h_{\mathrm{II}}[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)}+e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]\mu^{(t)}\right\}\\[2ex] \mu_{\mathrm{II}}^{(t)}=\dfrac{1+h_{\mathrm{II}}}{e_{\mathrm{II}}(h_{\mathrm{II}}-h_{\mathrm{I}})(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)}}\left\{(1+h_{\mathrm{I}})(1+e_{\mathrm{I}})[1+e_{\mathrm{II}}-h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}]-h_{\mathrm{I}}[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)}+e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]\mu^{(t)}\right\}\end{cases}$$

$$h_{\mathrm{I}}\neq h_{\mathrm{II}} \tag{4}$$

同样由于每个部类的边际剩余价值率与剩余价值率相同,$\Delta M_j^{(t)}=e_j\Delta V_j^{(t)}\,(j=\mathrm{I},\mathrm{II})$。$\Delta Y_j^{(t)}=\Delta V_j^{(t)}+\Delta M_j^{(t)}$,以及 $\Delta V_j^{(t)}=\mu_j^{(t)}M_j^{(t)}/(1+h_j)$,利用这些关系式得到:

$$\Delta Y_j^{(t)}=(1+e_j)\mu_j^{(t)}M_j^{(t)}/(1+h_j) \qquad j=\mathrm{I},\mathrm{II} \tag{5}$$

因为:

$$Y_j^{(t+1)}=Y_j^{(t)}+\Delta Y_j^{(t)} \qquad j=\mathrm{I},\mathrm{II} \tag{6}$$

将(4)式和(5)式代入(6)式,并再次利用关系式 $Y_j^{(t)}=(1+e_j)V_j^{(t)}=(1+e_j)M_j^{(t)}/e_j$ 以及 $\varphi^{(t)}=Y_{\mathrm{II}}^{(t)}/Y_{\mathrm{I}}^{(t)}$,得

①陶为群、陶川, 2010.《马克思经济增长模型中的储蓄与劳动就业关系》,《当代经济研究》第 7期。

②陶为群、陶川, 2010.《马克思经济增长模型中的储蓄与劳动就业关系》,《当代经济研究》第 7期。

到每个部类 $t+1$年与 t年新创造价值之间的关系式:

$$\begin{cases} Y_{\mathrm{I}}^{(t+1)} = Y_{\mathrm{I}}^{(t)} + \dfrac{Y_{\mathrm{I}}^{(t)}}{(h_{\mathrm{I}} - h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{II}})}\left\{(1+h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{I}})[1+e_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}] - h_{\mathrm{II}}[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]\mu^{(t)}\right\} \\ Y_{\mathrm{II}}^{(t+1)} = \dfrac{Y_{\mathrm{I}}^{(t)}}{(h_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{I}})(1+e_{\mathrm{I}})}\left\{(1+h_{\mathrm{I}})(1+e_{\mathrm{I}})[1+e_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}] - h_{\mathrm{I}}[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]\mu^{(t)}\right\} + Y_{\mathrm{II}}^{(t)} \end{cases}$$

$$h_{\mathrm{I}} \neq h_{\mathrm{II}} \tag{7}$$

记 2阶矩阵$A_{2\times2}$为:

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{(1+h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{I}})[1+e_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}] - h_{\mathrm{II}}[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]\mu^{(t)}}{(h_{\mathrm{I}} - h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{II}})} & 0 \\ -\dfrac{(1+h_{\mathrm{I}})(1+e_{\mathrm{I}})[1+e_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}] - h_{\mathrm{I}}[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]\mu^{(t)}}{(h_{\mathrm{I}} - h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{I}})} & 1 \end{pmatrix}$$

则(7)式可以用矩阵形式表示为:

$$\begin{pmatrix} Y_{\mathrm{I}}^{(t+1)} \\ Y_{\mathrm{II}}^{(t+1)} \end{pmatrix} = A_{2\times2}\begin{pmatrix} Y_{\mathrm{I}}^{(t)} \\ Y_{\mathrm{II}}^{(t)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

从(8)式看到, t年两个部类新创造价值列向量$\left(Y_{\mathrm{I}}^{(t)}, Y_{\mathrm{II}}^{(t)}\right)'$经过左乘矩阵$A_{2\times2}$, 发展成为 $t+1$年列向量$\left(Y_{\mathrm{I}}^{(t+1)}, Y_{\mathrm{II}}^{(t+1)}\right)'$, 从经济含义上$A_{2\times2}$可以被看作"发展速度"矩阵。该矩阵并不是对角矩阵, 反映出每个部类新创造价值的发展不仅依赖本部类, 而且依赖另一个部类的新创造价值。这是马克思指出的社会总资本扩大再生产实现条件或平衡条件的一种体现。如果第 $t+1$年相对于 t年两个部类新创造价值增长率相同, 那么发展速度相同, 以 λ表示这个发展速度, 则有矩阵关系式:

$$\begin{pmatrix} Y_{\mathrm{I}}^{(t+1)} \\ Y_{\mathrm{II}}^{(t+1)} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} Y_{\mathrm{I}}^{(t)} \\ Y_{\mathrm{II}}^{(t)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

对比(8)式、(9)式看到, 根据矩阵特征值的知识, λ应当是矩阵$A_{2\times2}$的特征值。因此, 可以使用求矩阵特征值的方法求出 λ。以 $I_{2\times2}$表示 2阶单位矩阵, 令行列式$|\lambda I_{2\times2} - A_{2\times2}| = 0$, 解出$A_{2\times2}$的两个特征值 $\lambda_1 = 1$和 λ_2。

$$\lambda_2 = 1 + \frac{1}{(h_{\mathrm{I}} - h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{II}})}\left\{(1+h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{I}})[1+e_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}] - h_{\mathrm{II}}[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]\mu^{(t)}\right\}$$

$$h_{\mathrm{I}} \neq h_{\mathrm{II}} \tag{10}$$

当发展速度 $\lambda=1$时, 意味着两个部类的新创造价值都维持原有数量没有增长, 也就是维持简单再生产。现在以 $\lambda_1 = 1$代入与特征方程$|\lambda I_{2\times2} - A_{2\times2}| = 0$对应的二元齐次线性方程组, 解出 $\varphi^{(t)*} = (1+e_{\mathrm{II}})/h_{\mathrm{II}}$, 即$(Y_{\mathrm{II}}^{(t)}/Y_{\mathrm{I}}^{(t)})^* = (1+e_{\mathrm{II}})/h_{\mathrm{II}}$。这种情形时, 按照两个部类的不变资本、可变资本、剩余价值、新创造价值之间关系恰好 $V_{\mathrm{I}}^{(t)} + M_{\mathrm{I}}^{(t)} = C_{\mathrm{II}}^{(t)}$, 就是马克思给出的简单再生产条件。这时按照(1)式 $\Delta C_{\mathrm{I}}^{(t)}$、$\Delta C_{\mathrm{II}}^{(t)}$都等于0, 必然是两个部类的积累率 $\mu_{\mathrm{I}}^{(t)}$、$\mu_{\mathrm{II}}^{(t)}$也都等于 0。这就说明, 特征值 $\lambda_1 = 1$在模型中具有确切的意义。

再以 λ_2代入与特征方程对应的二元齐次线性方程组, 解出对应的全社会积累率 $\mu^{(t)*}$。

$$\mu^{(t)*} = (1+e_{\mathrm{I}})\frac{[1+e_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{II}}\varphi^{(t)}][(1+h_{\mathrm{II}})(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + (1+h_{\mathrm{I}})(1+e_{\mathrm{II}})]}{[e_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + e_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})][h_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + h_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})]} \quad h_{\mathrm{I}} \neq h_{\mathrm{II}} \tag{11}$$

需要指出, 全社会积累率 $\mu^{(t)*}$是由两个部类积累有相互约束的关系式以及两个部类新创造价值发展速度相同两个情形共同产生。

将 $\mu^{(t)*}$的表达式代回(10)式, 就化简为:

$$\lambda_2 = \frac{(1+e_{\mathrm{II}})(1+h_{\mathrm{I}}+e_{\mathrm{I}})}{h_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)} + h_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})} \qquad h_{\mathrm{I}} \neq h_{\mathrm{II}} \tag{12}$$

当 $\varphi^{(t)} = (1+e_{\mathrm{II}})/h_{\mathrm{II}}$时, 由(12)式得出 $\lambda_2 = 1$, 与 λ_1成为二重特征值。所以, λ_1是 λ_2的特殊情形, 矩

阵 $A_{2\times 2}$的特征值是唯一的。于是,现在可以只用 λ_2 作为矩阵 $A_{2\times 2}$的特征值 λ。

当第 $t+1$年相对于 t年两个部类新创造价值都以特征值 λ_2 作为发展速度,那么第 $t+1$年两个部类产出的比例 $\varphi^{(t+1)}$仍然是 $\varphi^{(t)}$不变。于是从 t年起,两个部类产出之比例关系就保持不变,根据(12)式从 $t+1$年起每个部类新创造价值的发展速度相同并且不变,进入两部类均衡扩大再生产状态。$A_{2\times 2}$的特征值的唯一性表明,两部类均衡扩大再生产的发展速度或增长速度只有一个,没有第二个。由(12)式表达的两部类均衡扩大再生产的发展速度,与张忠任(2006)给出的均衡扩大再生产的经济增长率表达式含义是一致的。但是下面要特别指出,两部类均衡扩大再生产对于其产出之比例关系 $\varphi^{(t)}$的取值,还有限制性的要求。

四、特征值的产生条件及其最大值

将(11)式代入(4)式,可解出对应的两个部类积累率 $\mu_j^{(t)*}$:

$$\mu_j^{(t)*}=\frac{1+h_j}{e_j}\left\{\frac{(1+e_{\mathrm{II}})(1+h_{\mathrm{I}}+e_{\mathrm{I}})}{h_{\mathrm{II}}(1+e_{\mathrm{I}})\varphi^{(t)}+h_{\mathrm{I}}(1+e_{\mathrm{II}})}-1\right\}\qquad h_{\mathrm{I}}\neq h_{\mathrm{II}}\quad j=\mathrm{I},\ \mathrm{II}\tag{13}$$

对于某个取定的 t年,两部类产出之比例关系 $\varphi^{(t)}$是个已经被确定的数值;而对于不同的年份 t,$\varphi^{(t)}$可以作为变量取不同值。在扩大再生产状态下,各部类的积累都是非负值,同时也不会超过本部类的剩余价值,也就是说积累率介于 0与 1之间。用算式表示就是:

$$0\leqslant\mu_j^{(t)*}\leqslant 1\qquad j=\mathrm{I},\ \mathrm{II}$$

将(13)式代入上式,解出 $\varphi^{(t)}$的取值上下限。

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+e_{\mathrm{I}}}\left(\dfrac{1+e_{\mathrm{II}}}{h_{\mathrm{II}}}\right)\leqslant\varphi^{(t)}\leqslant\dfrac{1+e_{\mathrm{II}}}{h_{\mathrm{II}}},\ 当\dfrac{e_{\mathrm{I}}}{1+h_{\mathrm{I}}}\leqslant\dfrac{e_{\mathrm{II}}}{1+h_{\mathrm{II}}}\\[2ex]\left(\dfrac{1+e_{\mathrm{II}}}{h_{\mathrm{II}}}\right)\dfrac{1}{1+e_{\mathrm{II}}/(1+h_{\mathrm{II}})}\left[1-\dfrac{h_{\mathrm{I}}}{1+e_{\mathrm{I}}}\left(\dfrac{e_{\mathrm{II}}}{1+h_{\mathrm{II}}}\right)\right]\leqslant\varphi^{(t)}\leqslant\dfrac{1+e_{\mathrm{II}}}{h_{\mathrm{II}}},\ 当\dfrac{e_{\mathrm{I}}}{1+h_{\mathrm{I}}}>\dfrac{e_{\mathrm{II}}}{1+h_{\mathrm{II}}}\end{cases}\qquad h_{\mathrm{I}}\neq h_{\mathrm{II}}\tag{14}$$

因为第 j部类的资本利润率是 $M_j/(C_j+V_j)=e_jV_j/(h_jV_j+V_j)=e_j/(1+h_j)\ (j=\mathrm{I},\ \mathrm{II})$,所以这里 $\varphi^{(t)}$取值的下限与两个部类的利润率有关。(14)式表明,在马克思两部类经济增长模型中,为了实现两个部类的均衡扩大再生产或者简单再生产,任何年份两个部类产出之比例关系 $Y_{\mathrm{II}}^{(t)}/Y_{\mathrm{I}}^{(t)}$的变化都是有上下界限的。也就是说,对于某个取定的 t年,只有在两个部类产出之比例满足(14)式的条件下,才能够产生特征值,才能够从 $t+1$年起每个部类新创造价值的发展速度相同并且不变。

根据(12)式,在能够产生特征值的情形下,特征值 λ_2 是两个部类产出的比例 $\varphi^{(t)}$的减函数。因此,可以通过求 $\varphi^{(t)}$的下限值与上限值,求得 $A_{2\times 2}$的特征值 λ的最大值与最小值。当 $\varphi^{(t)}$在(14)式中取上限值即 $\varphi^{(t)}=(1+e_{\mathrm{II}})/h_{\mathrm{II}}$时,特征值 λ_2取得最小值 $\mathrm{Min}(\lambda_2)$,$\mathrm{Min}(\lambda_2)=1$,表示维持简单再生产状态。当 $\varphi^{(t)}$在(14)式中取下限值时,代入(12)式,特征值 λ_2取得最大值 $\mathrm{Max}(\lambda_2)$。

$$\mathrm{Max}(\lambda_2)=\begin{cases}1+\dfrac{e_{\mathrm{I}}}{1+h_{\mathrm{I}}},\ 当\dfrac{e_{\mathrm{I}}}{1+h_{\mathrm{I}}}\leqslant\dfrac{e_{\mathrm{II}}}{1+h_{\mathrm{II}}}\\[2ex]1+\dfrac{e_{\mathrm{II}}}{1+h_{\mathrm{II}}},\ 当\dfrac{e_{\mathrm{I}}}{1+h_{\mathrm{I}}}>\dfrac{e_{\mathrm{II}}}{1+h_{\mathrm{II}}}\end{cases}\qquad h_{\mathrm{I}}\neq h_{\mathrm{II}}\tag{15}$$

(15)式表明,最大特征值 $\mathrm{Max}(\lambda_2)$即全社会新创造价值最高均衡发展速度是资本利润率较低的那个部类的资本利润率加上 1;该较低的资本利润率就是全社会新创造价值最高均衡增长率。

还可以从(13)式看到,在全社会新创造价值均衡增长情形下,每个部类的积累率恰好是此均衡增长率与本部类的资本利润率之比。如果把两个部类的积累率相同作为均衡积累率,那么当且仅当两个部类的资本利润率相同,才可以取得均衡积累率。

五、马克思两部类经济增长模型的特征值的理论蕴涵

两部类经济按照特征值发展,是马克思两部类经济增长模型中的一种特殊均衡经济增长状态。由于每个部类的资本有机构成不变,即边际资本有机构成等于资本有机构成,那么第 j部类新增不变资本 $\Delta C_j^{(t)}$占本部类全部新增资本 $\mu_j^{(t)}M_j^{(t)}$ $(j=\ \ ,\ \ \ )$的比重,与不变资本占本部类全部资本中比重 $h_j/(1+h_j)$相等。所

以有:

$$\$C_j^{(t)} = \frac{h_j}{1+h_j} {}_L{}_j^{(t)} M_j^{(t)} \qquad j= \quad ,$$

将 $M_j^{(t)} = e_j V_j^{(t)}$, $V_j^{(t)} = C_j^{(t)} / h_j$ 代入上式, 得:

$$\frac{\$C_j^{(t)}}{C_j^{(t)}} = \frac{e_j}{1+h_j} {}_L{}_j^{(t)} \qquad j= \quad , \tag{16}$$

将(13)式代入(16)式得: $\$C_j^{(t)} / C_j^{(t)} = K_2 - 1 (j= \quad , \quad)$。这表明两个部类的不变资本增长率相同。两个部类不变资本增长率经过加权平均, 就获得全社会的不变资本增长率, 所以全社会的不变资本增长率仍然是这一相同的增长率 $K_2 - 1$。用同样方法可得, 两个部类以及全社会的可变资本增长率同样都是 $K_2 - 1$。这就表明, 在全社会新创造价值均衡增长的情形下, 每个部类不变资本、可变资本、新创造价值的增长率相同; 全社会不变资本、可变资本、新创造价值的增长率也相同。所以, 如果以 t年作为基年, 使从该年的下一年全社会新创造价值均衡增长, 那么由于两个部类新创造价值的增长率相同, 二者之间比例关系就保持不变, 第 $t+1$年两个部类产出的比例仍然是 $U^{(t)}$。根据(9)式、(13)式、(16)式等, 第 $t+2$年相对于第 $t+1$年的全社会新创造价值、不变资本、可变资本的增长率都与 $t+1$年相同。如此递推, 从 t年起, 可以保持全社会和每个部类积累率都固定不变; 各个部类不变资本、可变资本、新创造价值在全社会不变资本、可变资本、新创造价值当中所占比重不变; 第Ñ、Ò部类之间不变资本、可变资本、新创造价值的比例关系都固定不变; 全社会不变资本、可变资本、新创造价值之间的相互比例关系都固定不变; 并且从 $t+1$年起, 全社会不变资本、可变资本、新创造价值的增长率相同而且也固定不变。这种状态可以称为两部类经济均衡增长。

对比之下, 两部类经济按照特征值发展, 反映出比现代经济增长模型中的哈罗德模型更贴近经济现实、更全面和更深刻的内容和结果。哈罗德模型假设所考察的经济中只有一种产品 Y, 这种产品既可以作为消费品用于消费, 也可以用于投资作为资本品, 因而没有被消费掉的即作为投资品。这种产品在两种生产要素资本 K 和劳动 L 的共同作用下被生产出来。生产这种产品需要的两种生产要素资本和劳动分别对于产出的关系是不变的, 每生产一单位产品都需要消耗 A单位资本和 B单位劳动, 资本和劳动不能互相替代, 投资形成新增资本 $\$K$。哈罗德模型把社会储蓄率 s作为外生常数, 得出一个重要结论: 要使储蓄等于投资, 资本充分利用, 经济产出 Y与资本存量 K 都必须按储蓄率与资本-产出比率之比 s/A 增长, 并且把保持不变的 s/A 称为有保证的增长率。[1] 经济有保证的增长率增长, 是哈罗德模型的一种均衡增长状态。而马克思的两部类经济增长模型中, 有生产资料和消费资料两种产品 Y 和 Y, 生产资料只能在补偿生产的物质消耗后用于投资, 消费资料只能用于个人消费, 比哈罗德模型所考察的单一产品经济复杂和贴近现实。两部类经济增长模型中的第 t年新创造价值 $Y^{(t)} + Y^{(t)}$ 中, 没有被消费掉的都是生产资料, 用作净投资, 是新增生产资料 $\$C^{(t)} + \$C^{(t)}$。

所以, 两部类经济增长模型中的不变资本 C对应于哈罗德模型中的资本K; 可变资本 V的作用与哈罗德模型中劳动 L的作用类似。两部类经济增长模型假设每个部类的资本有机构成不变, 相当于假设在部类内部, 两种生产要素资本和劳动对于生产资料和消费资料产品的关系不变。全社会的不变资本与新创造价值比率 $(C^{(t)} + C^{(t)}) / (Y^{(t)} + Y^{(t)})$, 相当于哈罗德模型中的资本-产出比率 A; 可变资本与新创造价值比率 $(V^{(t)} + V^{(t)}) / (Y^{(t)} + Y^{(t)})$, 意义类似于哈罗德模型中的劳动-产出比率 B。根据前面分析获得的结论, 当两部类经济按照特征值发展, 全社会的不变资本与新创造价值比率、可变资本与新创造价值比率都保持固定不变, 类似于哈罗德模型中生产要素资本和劳动分别对于产出的关系不变的情形。所以, 两部类经济均衡增长状态, 与哈罗德模型所说的按有保证的增长率增长状态比较接近; 两部类经济均衡增长的新创造价值增长率 $K_2 - 1$, 对应着哈罗德模型中的产出增长率 s/A; 两部类经济均衡增长时全社会储蓄率 s也保持固定不变。[o] 但是, 在两部类经济均衡增长状态下, 全社会不变资本、可变资本、新创造价值在两个部类中的分布比例也都是保持固定不变, 这比哈罗德模型的均衡增长状态有更全面的涵义。并且, 由于在马克思两部类经济增长模型中全社会的边际资本有机构成等于资本有机构成, 那么全社会储蓄即新增生产资料 $(\$C^{(t)} + \$C^{(t)})$ 在整

马树才、朱力, 2005: 5宏观经济数量分析6, 经济科学出版社, 第 23– 32页。

陶为群、陶川, 2010: 5马克思经济增长模型中的储蓄与劳动就业关系6, 5当代经济研究6第 7期。

个积累当中的比重, 等于不变资本在全部资本当中的比重, 因而全社会储蓄是被整个积累所确定。所以在这里, 全社会储蓄率 s 是被两部类经济均衡增长所要求的特定全社会积累率 $L^{(t)*}$ 所确定。从 $L^{(t)*}$ 表达式(11)式看出, 这个积累率完全是由两个部类的结构参数所决定的, 是由模型求解出来的内生变量。因此, 两部类经济均衡增长情形下的全社会固定不变储蓄率 s 同样是由模型求解出来的内生变量, 与哈罗德模型中假设储蓄率作为外生变量有根本不同, 这是在更贴近经济现实的假定下获得更深刻、合理的结果。

两部类经济均衡增长具有的多种特殊表现, 可作为两部类经济非均衡增长的对照系。马克思经济增长模型的特征值的存在性、存在状况, 从理论上揭示了存在着一种两部类经济均衡、稳定增长的状况。前面已经指出, 两部类经济按照特征值发展具有多种特殊结果, 是否同时具备这些结果, 可以作为检验两部类经济增长是否均衡的条件。应当认识到, 两部类经济按照特征值发展, 是现实中难以达到的状态。哈罗德就其模型指出, 实际的经济增长率等于有保证的增长率, 在现实中只能是偶然的巧合, 一旦两者不相等, 就将出现累积性经济紧缩或经济扩张, 所以偏离稳定状态均衡增长的周期性经济波动将是难免的。而与此类似, 两部类经济均衡增长, 也是现实中难以达到的状态。前面的分析表明, 两部类经济达到均衡增长状态, 意味着必然全社会劳动者报酬与新创造价值相同幅度增长, 必然全社会不变资本、可变资本在全部资本当中的比重都保持不变, 必然全社会储蓄率(消费率)保持不变。按照马克思基于劳动价值论所阐述的资本的生产、流通、周转过程, 这些都是在现实中尤其是在资本主义生产方式下难以达到的状态。即便是全社会劳动者报酬达到与新创造价值相同幅度增长和资本有机构成不变, 由于在两部类经济增长模型中设定劳动者的工资全部支出用于消费, 那么, 保持全社会积累率固定不变, 就必须两个部类的企业所有者将剩余价值用于自身消费的比重保持固定不变。而随着生产规模和剩余价值量的不断扩大, 企业所有者有限的自身消费占剩余价值量的比重必然下降, 从而导致全社会消费资料需求的增长慢于消费资料生产的增长, 形成消费资料相对过剩, 进而导致偏离稳定均衡增长状态的周期性经济波动。于是, 特征值本身的存在性、存在状况, 反过来说明了经济非均衡增长是常态。因而, 对马克思的两部类经济非均衡增长的研究, 更具普遍意义。

六、引用和借鉴5资本论 6的算例验证

下面引用和借鉴马克思 5资本论 6第二卷第二十一章中的举例, 对以上论述与推导的关系式进行算例验证, 结果列于表 1。

表 1　引用和借鉴5资本论 6第二卷第二十一章中第一例的算例验证

状态	年度 t	部类	不变资本 $C^{(t)}$	可变资本、剩余价值 $V^{(t)}, M^{(t)}$	新创造价值 $Y^{(t)}=V^{(t)}+M^{(t)}$	部类比例 $U^{(t)}=\frac{Y^{(t)}}{Y^{(t)}}$	经济发展速度 $\frac{Y^{(t+1)}}{Y^{(t)}}$	特征值 K_2	剩余价值积累率 $L^{(t)}$
$h > h$, $h = 4$, $h = 2$ 时的特征值一般情形	1	全社会	5500	1750	3500	0.75			37.1%
		部类	4000	1000	2000				50%
		部类	1500	750	1500				20%
	2	全社会	6000	1900	3800	0.7273	118.6%		41.6%
		部类	4400	1100	2200		110.0%		50%
		部类	1600	800	1600		116.7%		30%
	3	全社会	6600	2090	4180	0.7273	110%	1.1	41.6%
		部类	4840	1210	2420		110%	1.1	50%
		部类	1760	880	1760		110%	1.1	30%
	4	全社会	7260	2299	4598	0.7273	110%	1.1	41.6%
		部类	5324	1331	2662		110%	1.1	50%
		部类	1936	968	1936		110%	1.1	30%
$h > h$, $h = 4$, $h = 2$ 时的特征值最大值情形	1	全社会	5500	1650	3300	0.5			86.7%
		部类	4400	1100	2200				100%
		部类	1100	550	1100				60%
	2	全社会	6600	1980	3960	0.5	120%	1.2	86.7%
		部类	5280	1320	2640		120%	1.2	100%
		部类	1320	660	1320		120%	1.2	60%
	3	部类	7920	2376	4752	0.5	120%	1.2	86.7%
		部类	6336	1584	3168		120%	1.2	100%
		全社会	1584	792	1584		120%	1.2	60%

马克思在5资本论6第二卷第二十一章中的第一例设定两个部类结构参数 $h = 4, h = 2, e = e = 1$, 做了连续 5年的扩大再生产计算, 来说明两个部类的扩大再生产过程。按照马克思的例示, 第 2年相对于第 1年两个部类的新创造价值发展速度不相同; 从第 3年起各年两个部类的新创造价值发展速度都相同, 确实是以特征值 K_2 作为发展速度。[1] 并且从第 3年起各年全社会积累率 $L^{(t)}$ 都是 41.6%, 符合本文给出的与 K_2 对应的特定积累率 $L^{(t)*}$ 算式; 两个部类的积累率 $L^{(t)}$、$L^{(t)}$ 也都符合对应的特定积累率 $L^{(t)*}$、$L^{(t)*}$ 算式。

借鉴使用该例第 1年的数据, 仍然设定两个部类结构参数 $h = 4, h = 2, e = e = 1$, 按照(15)式, 当两个部类产出之比例取下限值 $U^{(t)*} = (1+e)/[h(1+e)] = 1/2$, 可以使特征值 K_2 取得最大值 $\mathrm{Max}(K_2) = 1+e/(1+h) = 1.2$。为了比较, 让第 Ñ 部类的数据都与上例相同, 仅仅把两个部类产出之比例由0.7273改变成 1/2。按照本文给出的使特征值 K_2 取得最大值 $\mathrm{Max}(K_2)$ 条件, 连续 3年计算出对应的全社会积累率 $L^{(t)*}$ 和两个部类的积累率 $L^{(t)*}$、$L^{(t)*}$ 值, 也列在表 1中, 验证了所给出的 K_2 取得最大值 $\mathrm{Max}(K_2)$ 情形下各个关系式确实成立。

从本文全部论述可以归纳出主要几点: 马克思的扩大再生产模型是一个具有特殊结构的两部类经济增长模型, 两个部类的积累互相依赖、互为约束; 每个部类新创造价值的发展不仅依赖本部类, 而且依赖另一个部类的新创造价值和全社会的积累; 对于某个取定的 t 年, 在一定条件下模型存在唯一的特征值; 该特征值与 t 年全社会和每个部类的积累率都取特定值相对应, 是 t 年两个部类的新创造价值之比例的单调函数; 如果每个部类的积累率都取与该特征值相对应的特定值, 从下一年起, 两个部类的新创造价值就都以该特征值作为发展速度, 进入均衡发展状态; 两部类经济均衡发展的多种特殊表现, 可作为两部类经济非均衡增长的对照系。该特征值本身的存在性、存在状况, 反过来说明了两部类经济非均衡增长是常态。

参考文献:

1. 马克思, 2004: 5资本论6, 中译本, 第 2卷, 人民出版社。
2. 马树才、朱力, 2005: 5宏观经济数量分析6, 经济科学出版社。
3. 宋则行, 1995: 5马克思经济增长理论探索6, 5当代经济研究6第 1期。
4. 陶为群、陶川, 2010: 5马克思经济增长模型中的储蓄与劳动就业关系6, 5当代经济研究6第 7期。
5. 杨继国, 2001: 5马克思的增长理论与现代增长理论比较研究6, 5南开经济研究6第 4期。
6. 张忠任, 2006: 5数理政治经济学6, 经济科学出版社。
7. 赵树嫄, 2002: 5线性代数6, 中国人民大学出版社。

The Eigenvalue in Economic Growth Model of Marx and Its Theoretic Contents

Tao Weiqun[1] and Tao Chuan[2]

(1: Nanjing Branch, The People.s Bank of China; 2: Guanghua School of Management, Beijing University)

Abstract In order to combine the research on the theory of Marx.s economic growth with the quantitative methods of modern economic growth model, this paper explores the eigenvalue method in this field based on the special structure of Marx.s two departments. economic growth model. By analyzing the mutually restrictive relation between accumulation of the two departments and the parametric relation between the growth of the new creative value of each department and its accumulation, we obtain the only eigenvalue of the new creative value of each department, namely the only development speed in equilibrium. We also get the accumulation rate equation of the whole society and each department corresponding to the eigenvalue, and indicate the structural condition of the model and the maximum eigenvalue. With the view of the economic equilibrium and disequilibrium and a comparison to the Harrod.s economic growth model, we clarify the theoretic contents of the eigenvalue in our model. Finally, with reference to the Das Kapital, we exemplify our former analysis.

Key Words: Marx.s Economic Growth Model; Eigenvalue; Balanced Development; Structural Parameters

JEL Classification: A10

(责任编辑: 彭爽)

[1] 马克思, 2004: 5资本论6, 中译本, 第 2卷, 人民出版社, 第 569- 590页。