广义随机占优理论
——一种群体决策理论

唐爱国

摘要：本文以广义期望效用——RDEU模型为基础，推广了传统随机占优和"对偶随机占优"理论，提出了一种新的不确定性条件下的群体决策理论——广义随机占优理论。通过引入高阶转换函数和高阶(条件)期望效用概念，本文给出了风险厌恶者、风险爱好者、悲观主义者、乐观主义者广义随机占优定义及其充要条件，我们将这种研究思路称为经典方法。最后讨论了广义随机占优理论在经济研究和管理实践中的应用前景。

关键词：广义期望效用　广义随机占优　高阶期望效用

一、引言

20世纪40年代出现的经典期望效用原理是至今人们在研究不确定性条件下的经济问题时使用得最普遍的基本原理，传统随机占优理论就是以经典期望效用原理为基础。然而，有许多反例[①]证明经典期望效用原理存在固有的局限性，这种局限性制约了传统随机占优理论的发展和应用。

自从诺贝尔经济学奖得主Markowitz(1952,1959)于50年代提出以均值-方差模型为核心的证券选择理论之后，"随机占优"在60、70年代成为不确定性条件下决策理论的热门话题，并在投资决策、风险管理、资产定价、收入分配等诸多经济理论研究和管理实践中得以广泛的应用[②]。

在80年代，传统随机占优理论的发展进入非常缓慢的时期，这时经济学家们关于消费者在不确定性情况下的偏好理论研究却取得了突破性的进展。其中Quigin(1982,1993)提出的广义期望效用(RDEU)模型是一种数学形式最为简洁，且被理论和实践证明成功的非线性概率加权广义期望效用理论[③]。

在80年代末和整个90年代，随着广义期望效用理论基本发育成熟，关于随机占优理论的研究也取得了一些新的进展，但是这些新理论要么只是传统随机占优理论的简单推广，要么在理论基础和表述方式上存在固有的局限性，总体上是零散的或者不完善的，有些甚至是似是而非的。

本文继承和发展了现有各种随机占优理论的基本思想，以RDEU模型为基础，构建了一种新的不确定性情况下的群体决策理论，我们将其称为"广义随机占优理论"。本文将采用经典的消费者分类方法，主要研究风险厌恶者、风险爱好者、悲观主义者、乐观主义者等四种消费者群体的广义随机占优决策规则。

假设消费者在确定性条件下效用函数为$U(x)$，投资组合价值为随机变量X。为了区别不同随机变量的分布函数，我们用符号$F(x;X)$表示X的分布函数。Quigin使用一个非线性的转换函数$W(p)$取代经典期望效用原理中的分布函数$F(x;X)$。假定$W(p)$是累积概率$(p=F(x;X))$的单调函数，并满足归一性，即$W'(p)>0, W(0)=0, W(1)=1$，则RDEU模型可写为：

$$V(X;U;W)=\int U(x)\,dW[F(x;X)]$$

$V(X;U;W)$就是RDEU模型定义的广义期望效用，它可以解释AllaisParadox等经典期望效用原理不能解释的几乎所有反论。如果转换函数$W(p)=p$，则RDEU模型就退化为经典期望效用$E[U(X)]$；如果效用函数为$U(x)=x$，则RDEU模型就可改写成Yaari(1987)的"对偶理论"形式。

转换函数$W(p)$和效用函数$U(x)$一样能够反映人们对待风险的态度。与效用函数相对应，凹性转换函数($W''(p)<0$)，说明概率加权密度函数$W'(p)$是随着累积概率增加而降低的，表示消费者给概率分布的尾部(低回报处)赋予较大的权数，说明投资者在概率分布的尾部表现出更强的风险回避。相反，凸性转换函数表示该消费者是一个风险爱好者。Quigin(1993)将人们通过转换函数来表现的风险回避态度称为"Pessimism"，以区别于通过效用函数表现的风险回避态度，反之称为"Optimism"，我们姑且将其直译为"悲观主义"和"乐观主义"。

二、广义随机占优定义

实践中，消费者的效用函数和转换函数的具体形式通常都很难知道，主观的假设也难以被普遍接受。比如经济管理工作者或企业经营者在不同的政策之间进行选择时，往往需要比较所要采用的政策可能会产生的结果。因为被管理者是多种多样的，管理者可能知道被管理者的类型，但并不知道各个被管理者效用函数和转换函数的具体数学形式。因此管理者选择政策的标准就必须适合大多数被管理者，而不宜主观地假设被管理者的效用函数或转换函数为某一具体的数学形式。

1. 广义随机占优概念

所谓广义随机占优就是具有一定共同偏好特征和价值判断标准的追求RDEU最大化的群体或组织在不确定性条件下选择群体一致行动的决策规则。通常不是任何群体都可以达成完全一致的决策结论的，现实生活中，因为人们意见不统一而无法达成一致决策的情况经常发生。一个群体或组织如果希望达成完全一致的决策，群体中的成员就必须具有某种共同的偏好特征和价值判断标准。

建立广义随机占优概念的前提是根据共同偏好特征和

价值判断标准对消费者群体进行分类,然后研究各种类型的消费者群体在什么情况下才能达成完全一致的决策,能使这种群体达成一致决策的充分必要条件就构成该群体的决策规则。由于 RDEU模型中存在两种风险态度描述方式,因此有两大类基本的广义随机占优定义。

2. 已知转换函数的广义随机占优定义

已知转换函数时的广义随机占优是传统随机占优的直接推广,根据消费者是风险厌恶者还是风险爱好者我们定义两种广义随机占优概念。我们将转换函数相同,效用函数满足 $(-1)^{k+1}U^{-k}(x)\geq 0, k=1,2,3,\cdots n$ 的消费者群体称为第 n 阶风险厌恶者④,记为 U^n;将转换函数相同,效用函数满足 $U^{-k}(x)\geq 0, k=1,2,3,\cdots n$ 的消费者群体称为第 n 阶风险爱好者,记为 U_n。

为表述方便起见,我们不妨假设作为研究对象的随机变量是投资组合的价值。

定义 1: 风险厌恶者广义随机占优

假设已知转换函数 $W(p)$,如果对任意效用函数 $U\in U^n$ 的消费者,投资组合 X_1、X_2 形成的 RDEU 满足,$V(X_1;U^n;W)\geq V(X_2;U^n;W)$,且至少存在一个效用函数 $U^*\in U^n$ 使得不等式严格成立,则称 X_1 是 n 阶广义随机占优于 X_2 的,记为 $X_1\geq^{W}_{U^n\text{-}SD}X_2$。

定义 1 意味着,如果 $X_1\geq^{W}_{U^n\text{-}SD}X_2$,则所有追求 RDEU最大化的第 n 阶风险厌恶者都会认为 X_1 优于 X_2,因此 X_1 广义随机占优于 X_2 不只是某一单个投资者而是整个群体的共同价值判断。如果转换函数是累积概率的线性函数,即 $W(p)=p$,则 RDEU就退化为经典期望效用,这时上述广义随机占优定义就退化为传统随机占优概念。

定义 2: 风险爱好者广义随机占优

假设已知转换函数 $W(p)$,如果对任意效用函数 $U\in U_n$ 的消费者,投资组合 X_1、X_2 形成的 RDEU 满足,$V(X_1;U_n;W)\geq V(X_2;U_n;W)$,且至少存在一个效用函数 $U^*\in U_n$ 使得不等式严格成立,则称 X_1 是 n 阶广义随机占优于 X_2 的,记为 $X_1\geq^{W}_{U_n\text{-}SD}X_2$。

3. 已知效用函数时的广义随机占优定义

已知效用函数时广义随机占优只与转换函数的类型有关,与转换函数的具体函数形式无关。根据消费者是悲观主义者还是乐观主义者我们可以定义两种广义随机占优概念。我们将效用函数相同,转换函数满足 $(-1)^{k+1}W^{(-k)}(P)\geq 0, k=1,2,3,\cdots n$ 的消费者群体称为第 n 阶悲观主义者,记为 W^n;将效用函数相同,转换函数满足 $W^{(-k)}(P)\geq 0, k=1,2,3,\cdots n$ 的消费者群体称为第 n 阶乐观主义者,记为 W_n。

定义 3: 悲观主义者广义随机占优

假设已知效用函数 $U(x)$,如果对任意转换函数 $W\in W^n$ 的消费者,投资组合 X_1、X_2 形成的 RDEU 满足,$V(X_1;U;W^n)\geq V(X_2;U;W^n)$,且至少存在一个转换函数 $W^*\in W^n$ 使得不等式严格成立,则称 X_1 是 n 阶广义随机占优于 X_2 的,记为 $X_1\geq^{U}_{W^n\text{-}SD}X_2$。

定义 4: 乐观主义者广义随机占优

假设已知效用函数 $U(x)$,如果对任意转换函数 $W\in W_n$ 的消费者,投资组合 X_1、X_2 形成的 RDEU 满足,$V(X_1;U;W_n)\geq V(X_2;U;W_n)$,且至少存在一个转换函数 $W^*\in W_n$ 使得不等式严格成立,则称 X_1 是 n 阶广义随机占优于 X_2 的,记为 $X_1\geq^{U}_{W_n\text{-}SD}X_2$。

正如大多数消费者是风险厌恶者一样,实际中大多数消费者可能都是某种类型的悲观主义者,因此风险厌恶者和悲观主义者广义随机占优可能具有更广泛的应用价值,当然这并不否定存在风险爱好者和乐观主义者。为对比起见,我们分别研究这四种消费者的广义随机占优充要条件。

三、风险厌恶者和风险爱好者广义随机占优充要条件

为了得到风险厌恶者和风险爱好者广义随机占优充要条件,我们引入"高阶转换函数"概念。

1. 高阶转换函数的定义

定义 5: 假设 $W(p)>0, W(0)=0, W(1)=1$, 随机变量 X 的分布函数为 $F(x;X)$,且 $a\leq X\leq b$, 定义:

(1) $T^{(1)}(x,X)=W[F(x;X)], T_{(1)}(x;X)=1-T^{(1)}(x,X)$;

(2) n 阶上转换函数:$T^{(n)}(x;X)=\int_a^x T^{(n-1)}(s;X)ds, n=2,3,\cdots$

(3) n 阶下转换函数:$T_{(n)}(x;X)=\int_x^b T_{(n-1)}(s;X)ds, n=2,3,\cdots$

我们将定义 5 中的 $T^{(n)}(x;X)$ 和 $T_{(n)}(x;X)$ $(n=1,2,\cdots)$ 统称为高阶转换函数⑤。

2. 风险厌恶者广义随机占优充要条件

已知转换函数时,风险厌恶者广义随机占优充要条件可以写成如下定理(其证明见附录,下同)。

定理 6: 假设 $a\leq Xi\leq b(i=1,2)$,则 $X_1\geq^{W}_{U^n\text{-}SD}X_2(n=1,2,3,\ldots)$,当且仅当:(1) $T^{(k)}(b;X_1)\leq T^{(k)}(b;X_2), k=1,2,\cdots n$; (2) 对任意实数 $x, T^{(n)}(x;X_1)\leq T^{(n)}(x;X_2)$; (3) 至少有一个不等式严格成立。

一阶广义随机占优充要条件可简化为 $\forall x, T^{(1)}(x;X_1)\leq T^{(1)}(x;X_2)$,即要求 X_1 的上转换函数曲线 $T^{(1)}(.;X_1)$ 位于 X_2 的上转换函数曲线 $T^{(1)}(.;X_2)$ 之下(以 x 为横轴,下同)。由于 $T^{(1)}(b;X)=W(1)\equiv 1$, 因此二阶广义随机占优充要条件可简化为 $\forall x, T^{(2)}(x;X_1)\leq T^{(2)}(x;X_2)$,即要求 X_1 的二阶上转换函数曲线 $T^{(2)}(.;X_1)$ 位于 X_2 的二阶上转换函数曲线 $T^{(2)}(.;X_2)$ 之下。

如果消费者是第 n 阶风险厌恶者 $(n\geq 3)$,则 n 阶广义随机占优的充要条件不仅要求 X_1 的 n 阶上转换函数曲线位于 X_2 的 n 阶上转换函数曲线之下;由于一般地,$T^{(k)}(b;X_1)\neq T^{(k)}(b;X_2)$,因此还要求 X_1 的 1 至 $(n-1)$ 阶上转换函数曲线的右端点位于 X_2 的相应阶上转换函数曲线的右端点之下。

当 $W(p)=p$ 时,定理 6 描述的广义随机占优充要条件就退化为传统随机占优的充要条件。这时消费者风险偏好就只能通过效用函数来描述,因此难免会出现与 Allais 反论相似的矛盾和错误。

3. 风险爱好者广义随机占优充要条件

定理 7: 假设 $a\leq Xi\leq b(i=1,2)$,则 $X_1\geq^{W}_{U_n\text{-}SD}X_2(n=1,2,3,\ldots)$,当且仅当:(1) $T_{(k)}(a;X_1)\geq T_{(k)}(a;X_2), k=1,2,\cdots n$; (2) 对任意实数 $x, T_{(n)}(x;X_1)\geq T_{(n)}(x;X_2)$; (3) 至少有一个不等式严格成立。

风险爱好者广义随机占优充要条件和风险厌恶者广义随机占优充要条件类似,不同之处有三点:(1) 将上转换函数 $T^{(k)}(x;X_i)$ 换成下转换函数 $T_{(k)}(x;X_i), i=1,2$; (2) 将右端点条件 $T^{(k)}(b;X_i)$ 换成左端点条件 $T_{(k)}(a;X_i), i=1,2$; (3) 将不

等号反向。

四、悲观主义者和乐观主义者广义随机占优充要条件

为了得到悲观主义者和乐观主义者广义随机占优充要条件,我们引入高阶条件期望效用等概念。

1. 分位数函数、高阶分位数积分与高阶条件期望

定义 8(Artzner等,1999):设 $F(x;X)$ 为随机变量 X 的分布函数。对给定的概率 $\alpha\in[0,1]$,X 在概率 α 处的分位数定义为任意属于集合 $Q(\alpha;X)=\{x\in R:F(x^-;X)\le\alpha\le F(x;X)\}$ 的元素。取任意"唯一"的 $q(\alpha;X)\in Q(\alpha;X)$,则 $q(\alpha;X)$ 为 X 关于 α 的分位数函数。下分位数函数定义为:$q_d(\alpha;X)=\sup\{x\in R:F(x;X)<\alpha\}$;上分位数函数定义为:$q_u(\alpha;X)=\sup\{x\in R:F(x;X)\le\alpha\}$。无歧义时分位数函数可记为 $x(\alpha)$。

定义 9:假设 $a\le X\le b$,对任意 $\alpha\in[0,1]$

(1)零阶上分位数积分定义为:

$QI^{(0)}(\alpha;X)=QI_{(0)}(\alpha;X)=q(\alpha;X)$;

(2)n 阶上分位数积分定义为:

$QI^{(n)}(\alpha;X)=\int_0^{\alpha}QI^{(n-1)}(p;X)dp$;

(3)n 阶下分位数积分定义为:

$QI_{(n)}(\alpha;X)=\int_{\alpha}^{1}QI_{(n-1)}(p;X)dp$;

(4)n 阶上条件期望定义为:

$E^{(n)}(\alpha;X)=n!\ \alpha^{-n}QI^{(n)}(\alpha;X)$;当 $\alpha=0$ 时,定义:$E^{(n)}(0;X)=\lim_{\alpha\to 0}E^{(n)}(\alpha;X)=q_u(0;X)$。n 阶上无条件期望定义为:$E^{(n)}(X)=E^{(n)}(1;X)$;

(5)n 阶下条件期望定义为:

$E_{(n)}(\alpha;X)=n!\ (1-\alpha)^{-n}QI_{(n)}(\alpha;X)$;当 $\alpha=1$ 时,定义:$E_{(n)}(1;X)=\lim_{\alpha\to 1}E_{(n)}(\alpha;X)=q_d(1;X)$。n 阶下无条件期望定义为:$E_{(n)}(X)=E_{(n)}(0;X)$。

准确地讲,上面定义的高阶条件期望是一种以累积概率为条件的"概率条件期望"。不过当 $n=1$ 时,$E^{(1)}(1,X)=E_{(1)}(0,X)=E(X)$,因此一阶(上、下)无条件期望就是普通期望概念。当概率分布连续时,有 $F[x(\alpha)]=\alpha$,不难证明,这时一阶上条件期望 $E^{(1)}(\alpha;X)$ 就是尾部条件期望 $E[X|X\le x(\alpha)]$,一阶下条件期望 $E_{(1)}(\alpha;X)$ 就是顶部条件期望 $E[X|X\ge x(\alpha)]$。高阶上、下条件期望可以看作是一阶上、下条件期望的高阶推广,具有和一阶上、下条件期望相似的性质和数理含义。例如在仿射变换下,对任意常数 $c,\lambda>0$,有

$E^{(n)}(p;\lambda X+c)=\lambda E^{(n)}(p;X)+c,E_{(n)}(p;\lambda X+c)=\lambda E_{(n)}(p;X)+c$。

2. 高阶期望效用和高阶条件期望效用

定义 10:假设效用函数 $U(x)$ 有界,$U(a)\le U(Xi)\le U(b)$,我们将效用函数 $U(.)$ 作用于随机变量 X 后形成的随机变量 $U(X)$ 称为随机效用;将 $U(X)$ 的 k 阶(上、下)条件期望 $E^{(k)}[p;U(X)]$、$E_{(k)}[p;U(X)]$分别称为 X 的"k 阶上条件期望效用"和"k 阶下条件期望效用";将 $U(X)$ 的 k 阶上无条件期望 $E^{(k)}[U(X)]$ 和下无条件期望 $E_{(k)}[U(X)]$分别称为"k 阶上期望效用"和"k 阶下期望效用"。

当 $k=0$ 时,$E^{(0)}[p;U(X)]=q[p;U(X)],E_{(0)}[p;U(X)]=q[p;U(X)]$,因此"零阶上、下条件期望效用"就是随机效用 $U(X)$ 的分位数函数。当 $k=1$ 时,有 $E^{(1)}[U(X)]\equiv E_{(1)}[U(X)]\equiv E[U(X)]$,因此一阶(上、下)期望效用就是经典期望效用。高阶(条件)期望效用作为经典期望效用的高阶推广,具有和经典期望效用类似的性质和经济含义。根据积分的变量替换法则,RDEU可以写成:

$$V(X;U;W)=\int_a^b U(x)dW[F(x;X)]=\int_0^1 U[x(p)]dW(p)=\int_0^1 q[p;U(X)]dW(p)$$

以上式为基础,反复运用分部积分法和反证法,我们可以分别得到已知效用函数时悲观主义者和乐观主义者广义随机占优充要条件。

3. 悲观主义者广义随机占优充要条件

定理 11:假设 $U(a)\le U(Xi)\le U(b)(i=1,2)$,则 $X_1\ge_{W^n\text{-}SD}^{U}X_2\ (n=1,2,\cdots)$,当且仅当:

(1) $QI^{(k)}[1;U(X_1)]\ge QI^{(k)}[1;U(X_2)]$或 $E^{(k)}[U(X_1)]\ge E^{(k)}[U(X_2)],k=1,2,\cdots,n-1$;

(2)对任意 $p\in[0,1]$,$QI^{(n-1)}[p;U(X_1)]\ge QI^{(n-1)}[p;U(X_2)]$或 $E^{(n-1)}[p;U(X_1)]\ge E^{(n-1)}[p;U(X_2)]$;

(3)至少有一个不等式严格成立。

显然,根据定义 9、10,$QI^{(k)}[p;U(X_1)]\ge QI^{(k)}[p;U(X_2)]$ 等价于 $E^{(k)}[p;U(X_1)]\ge E^{(k)}[p;U(X_2)]$。当 $n=1$ 时,悲观主义者的一阶广义随机占优充要条件可简化为 $q[p;U(X_1)]\ge q[p;U(X_2)]$,即要求 X_1 的上分位数效用曲线整体上位于 X_2 的上分位数效用曲线的右边(以 p 为纵轴,下同)。

当 $n=2$ 时,二阶广义随机占优充要条件可简化为,对任意 $0\le p\le 1$,$E^{(1)}[p;U(X_1)]\ge E^{(1)}[p;U(X_2)]$。当 $n\ge 3$ 时,n 阶广义随机占优充要条件不但要求 X_1 的$(n-1)$阶上条件期望效用曲线 $E^{(n-1)}[.;U(X_1)]$整体上位于 X_2 的$(n-1)$阶上条件期望效用曲线 $E^{(n-1)}[.;U(X_2)]$的右边,而且要求 X_1 的 1 至$(n-1)$阶上期望效用大于 X_2 的相应阶上期望效用。

当效用函数为线性函数时,RDEU可改写为 Yaari(1987)的"对偶理论"形式。可以证明(略),Wang(1998)等人根据"对偶理论"构建的"对偶随机占优"只是定理 11 的悲观主义者广义随机占优的一个特例。然而,当效用函数为线性函数时,将会出现与 AllaisParadox 对偶的"DualParadox"(Yaari,1987)问题,"对偶随机占优"理论还存在表述方式过于繁杂,经济含义不够清晰等问题。

4. 乐观主义者广义随机占优充要条件

定理 12:假设 $U(a)\le U(Xi)\le U(b)\ (i=1,2)$,则 $X_1\ge_{W_n\text{-}SD}^{U}X_2\ (n=1,2,\cdots)$,当且仅当:

(1) $QI_{(k)}[0;U(X_1)]\ge QI_{(k)}[0;U(X_2)]$或 $E_{(k)}[U(X_1)]\ge E_{(k)}[U(X_2)],k=1,2,\cdots,n-1$;

(2)对任意 $p\in[0,1]$,$QI_{(n-1)}[p;U(X_1)]\ge QI_{(n-1)}[p;U(X_2)]$或 $E_{(n-1)}[p;U(X_1)]\ge E_{(n-1)}[p;U(X_2)]$;

(3)至少有一个不等式严格成立。

乐观主义者广义随机占优充要条件和悲观主义者广义随机占优充要条件类似,两者不等号同向,不同之处只有两点:(1)将高阶上条件期望效用 $E^{(k)}[p;U(X)]$换成高阶下条件期望效用 $E_{(k)}[p;U(X)]$;(2)将上端点条件 $E^{(k)}[U(X)]$换成下端点条件 $E_{(k)}[U(X)]$。

通过上、下高阶条件期望效用的差别,我们还可以更直观地理解悲观主义者和乐观主义者思维方式的差异。悲观主义者总是从"结果最坏"的状态$(p=0)$出发,再逐步考虑"结果较好"的状态$(p>0)$,对应的高阶上条件期望效用的积分区间为$[0,p]$。相反乐观主义者总是从"结果最好"的状态$(p=1)$出发,再逐步考虑"结果较坏"的状态$(p<1)$,对应的高阶下条件期望效用的积分区间为$[p,1]$。如果给定一个置

信度 $(1-\alpha)$,即给定一种参考状态,悲观主义者考虑的总是比这种参考状态较差的平均结果(上条件期望效用) ,而乐观主义者考虑的总是比这种参考状态更好的平均结果(下条件期望效用) 。类似地,我们可以从上、下高阶转换函数的不同来理解风险厌恶者和风险爱好者思维方式的差异。

五、讨论

1. 广义随机占优的阶次特性

广义随机占优的阶次与消费者面对风险的厌恶(或爱好) 和“悲观”(或乐观) 的偏好程度有关,这种偏好程度反映在消费者效用函数和转换函数的高阶导数上。根据前述消费者的偏好阶次分类,不难证明: $U^{n+1} \subseteq U^{n}$, $U_{n+1} \subseteq U_{n}$, $W^{n+1} \subseteq W^{n}$, $W_{n+1} \subseteq W_{n}$ 。这就是说高阶风险厌恶者 U^{n+1} 必定是低阶风险厌恶者 U^{n} ,但是低阶风险厌恶者 U^{n} 不一定是高阶风险厌恶者 U^{n+1} ,因此低阶风险厌恶者可能对高阶广义随机占优没有反应。另外三种消费者对不同阶次的广义随机占优的反应也存在相同的关系。

运用广义随机占优的充要条件,不难证明四种广义随机占优有一个共同特征:低阶广义随机占优成立时高阶广义随机占优必然成立,但是反过来则不一定成立。因此高阶广义随机占优是比低阶广义随机占优“更弱的占优”。广义随机占优的这种阶次关系,为实际应用中掌握计算阶次和节约计算成本提供了依据。因为如果计算到一定阶次时能断定两投资组合之间存在广义随机占优关系,我们就可以断定更高阶次的计算结果也必然如此,因此可以就此停止计算。

2. 广义随机占优的基本假设

广义随机占优理论提供了一种只需要知道转换函数或效用函数中任意一个的具体数学形式就可能预测消费者群体决策行为的新方法。风险厌恶者或风险爱好者广义随机占优决策需要假设群体中所有消费者的转换函数完全相同,并且须知道该函数的具体数学形式。悲观主义者或乐观主义者广义随机占优决策假设群体中所有消费者的效用函数相同,并且知道该函数的具体数学形式。

人们在不确定条件下偏好的差异可能是非常大的,但人们在确定性条件下偏好的差异比在不确定性条件下的偏好差异会小得多。因此假设消费者群体在确定性条件下的效用函数相同比假设他们在不确定性条件下的转换函数相同可能更加接近实际情况。

与描述人们在面对确定性情况下偏好特征的效用函数相比,经济学家们对描述人们在面对不确定性情况下偏好特征的转换函数的具体数学形式目前尚没有非常一致的观点,因此在选择转换函数时更多地反映了研究者的主观偏好。尽管转换函数可以用“主观概率加权”的思想来解释,但是转换函数经过对 x 的高阶积分后,得到的高阶转换函数不再具有普通概率分布函数的数理性质和经济含义,如不再满足归一性。相比之下,已知效用函数时的广义随机占优概念充要条件判别工具——是高阶(条件)期望效用——可作为经典期望效用的高阶推广,其经济含义更加清晰。

3. 广义随机占优理论的应用前景

广义随机占优理论在经济、金融理论研究和实际经济管理工作中都具有广泛的潜在应用价值。在经济和金融理论方面,由于现有的绝大多数研究不确定性条件下的排序、度量、选择与优化的理论都是以经典期望效用原理或传统随机占优理论为基础的,这些理论不可避免地要受到其理论基础所固有的局限性的制约。而现有风险测度理论、资产定价理论、资产组合理论等实践功能非常强的应用经济、金融理论,及收入分配理论、宏微观经济学、博弈论等都可以从广义期望效用和广义随机占优的角度进行重新思考或改造。

Levy(1998b) 列举了传统随机占优理论在资本结构与公司定价,生产、储蓄与多样化,破产概率估计,期权定价、保险和资产组合,农业经济,医药经济,收入不均等测度,参数估计量的选择等八个领域中具有重要的应用价值。作为传统随机占优理论的系统推广,广义随机占优理论在包括上述八个领域在内的更广泛的应用经济领域中均有着潜在的应用价值。

比如,本文作者(2002,2003) 应用广义随机占优理论不但得到了一种性能比现行国际风险管理工具 Var 和内在一致风险测度 ES 更加优良的新风险测度指标——高阶期望损失风险测度,还成功地将现有十几种经济福利测度指标有机地统一起来,得到了兼有传统 GINI 系数和 Atkinson 指数优越性,并能克服其各自局限性的新的经济不均等指标——广义 Atkinson 指数。

在经济管理实际工作中,预期广义随机占优理论不但可用于企业投资项目评估、金融机构或一般企业的风险管理、对业务人员或经营机构的业绩评价等微观经济主体的投资决策和内部管理工作中,比如证券投资基金投资组合的优化与绩效评估;也可以用于政府经济管理部门的政策选择、经济监管与评估、管理体制的设计与运行等宏观经济领域的实际管理工作中,比如金融风险管理体系建设、税收政策和社会保障制度的设计与评估等。

六、结论

作为一种新的不确定性条件下的群体决策理论,本文提出的广义随机占优理论将原有多种随机占优理论有机地统一起来。传统随机占优就是已知转换函数为线性函数时的风险厌恶者广义随机占优,“对偶随机占优”只是已知效用函数为线性函数时悲观主义广义随机占优的一个特例。

风险厌恶者、风险爱好者、悲观主义者和乐观主义者广义随机占优决策可以分别使用高阶上、下转换函数,高阶上、下条件期望效用来进行。对上述四种消费者群体,低阶广义随机占优成立时高阶广义随机占优都必然成立。

广义随机占优理论在经济理论研究和管理实践工作中具有广泛的潜在应用价值。已知转换函数时的广义随机占优概念的实际应用价值有限;已知效用函数时的广义随机占优概念,不但假设前提比较接近实际,其充要条件判别工具的经济含义比较明确,因此潜在的应用价值较大。

附录:

定理 6 的证明:因为 $T^{(k)}(\alpha;X)=0, k=1,2,\cdots,n$ 。根据 RDEU 模型和定义 5, 反复运用分部积分法得:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_a^b U(x)\,dT^{(1)}(x;X) = U(b)T^{(1)}(b;X) - U(a)T^{(1)}(a;X) - \int_a^b T^{(1)}(x;X)U^{(-1)}(x)\,dx \\
&= U(b)T^{(1)}(b;x) - \int_a^b U^{(-1)}(x)\,dT^{(2)}(x;X) \\
&= U(b)T^{(1)}(b;X) - [U^{(-1)}(b)T^{(2)}(b;X) - \int_a^b T^{(2)}(x;X)U^{(-2)}(x)\,dx] \\
&= U(b)T^{(1)}(b;x) - [U^{(-1)}(b)T^{(2)}(b;X) - U^{(-2)}(b)T^{(3)}(b;X) + \int_a^b T^{(3)}(x;X)U^{(-3)}(x)\,dx] \\
&= -[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{(k+1)}U^{(-k)}(b)T^{(k+1)}(b;X) + (-1)^{(n+1)}\int_a^b T^{(n)}(x;X)U^{(-n)}(x)\,dx]
\end{aligned}
$$

由于 $T^{(1)}(b;X_1)=T^{(1)}(b;X_2)=W(1)=1$, 因此广义随机占优要求:

$V(X_1)-V(X_2)=-\{\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{(k+1)}U^{(-k)}(b)[T^{(k+1)}(b;X_1)-T^{(k+1)}(b;X_2)]+(-1)^{(n+1)}\int_a^b[T^{(n)}(x;X_1)-T^{(n)}(x;X_2)]U^{(-n)}(x)dx\}\geq 0$

充分性是显然的,只要将定理6的条件和关于效用函数的假设 $(-1)^{(k+1)}U^{(-k)}(x)\geq 0,k=1,2,\cdots,n$ 代入即可。必要性可以使用类似于 Levy(1998b) 的反证法来证明。注意到广义随机占优要求对任意满足 $(-1)^{(k+1)}U^{(-k)}(x)>0$ 的效用函数,广义期望效用占优不等式都成立。如果命题条件不满足,则总可以找到一个风险厌恶者的效用函数使得广义期望效用占优不等式不成立。

假设 $X_1\geq^{W}_{U^n\text{-SD}}X_2$,但存在一点 x^* 使得 $T^{(n)}(x^*;X_1)>T^{(n)}(x^*;X_2)$,由于积分的连续性,在 x^* 的邻域 $\delta(x^*)$ 必定满足:当 $x\in\delta(x^*)$,$T^{(n)}(x;X_1)>T^{(n)}(x;X_2)$。构造一个效用函数 $U^*(x)$ 使得,当 $x\notin\delta(x^*)$ 时,$U^{(-k)}(x)=0,k=1,2,\cdots,n$; 当 $x\in\delta(x^*)$ 时,$(-1)^{(n+1)}U^{(-n)}(x)>0$。代入上式,则有:

$$V(X_1)-V(X_2)=-(-1)^{(n+1)}\int_{\delta(x^*)}[T^{(n)}(x;X_1)-T^{(n)}(x;X_2)]\times U^{(-n)}(x)dx<0$$

这与假设 $X_1\geq^{W}_{U^n\text{-SD}}X_2$ 矛盾。对于其他违反定理条件的假设可以采用类似的反证法来证明。

定理7的证明:类似定理6的证明,因为 $t_{(k)}(b;X)=0,k=1,2,\cdots,n$。反复运用分部积分法得:

$$V(X)=-\int_a^bU(X)dT_{(1)}(x;X)=-[U(b)T_{(1)}(b;X)-U(a)T_{(1)}(a;X)]+\int_a^bT_{(1)}(x;X)U^{(-1)}(x)dx$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}U^{(-k)}(a)T_{(k+1)}(a;X)+\int_a^bT_{(n)}(x;X)U^{(-n)}(x)dx$$

注意到 $T_{(1)}(a;X_1)=T_{(1)}(a;X_2)=W(0)=0$,再运用类似定理6的证明方法即可证明定理7。

定理11的证明:因为 $QI^{(k)}[0;U(x)]=0,k=1,2,\cdots$,根据 RDEU 模型和定义10,反复运用分部积分法得:

$$V(X)=\int_0^1QI^{(0)}[p;U(x)]dW(p)=\int_0^1W^{(-1)}(p)dQI^{(1)}[p;U(x)]$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{(k+1)}W^{(-k)}(1)QI^{(k)}[1;U(X)]+(-1)^{(n+1)}\int_0^1QI^{(n-1)}[p;U(X)]W^{(-n)}(p)dp$$

因此广义随机占优要求:

$V(X_1)-V(X_2)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{(k+1)}W^{(-k)}(1)\{QI^{(k)}[1;U(X_1)]-QI^{(k)}[1;U(X_2)]\}+(-1)^{(n+1)}\int_0^1\{QI^{(n-1)}[p;U(X_1)]-QI^{(n-1)}[p;U(X_2)]\}W^{(-n)}(p)dp\geq 0$

充分性只要将定理11的条件和关于转换函数的假设 $(-1)^{(k+1)}W^{(-k)}(p)\geq 0(k=1,2,\cdots n)$ 代入即可。必要性可以使用类似于定理6的反证法来证明。注意到 n 阶广义随机占优要求对任意满足 $(-1)^{(k+1)}W^{(-k)}(p)\geq 0$ 的转换函数,广义期望效用占优不等式都成立,如果命题条件不满足,则总可以找到一个悲观主义者的转换函数使得广义期望效用占优不等式不成立。

假设 $X_1\geq^{U}_{W^n\text{-SD}}X_2$,但存在一点 p^* 使得 $QI^{(n-1)}[p^*;U(X_1)]<QI^{(n-1)}[p^*;U(X_2)]$,由于积分的连续性,在 p^* 的邻域 $\delta(p^*)$ 必定满足:$p\in\delta(p^*)$,$QI^{(n-1)}[p;U(X_1)]<QI^{(n-1)}[p;U(X_2)]$。构造一个转换函数 $W^*(p)$ 使得,当 $p\notin\delta(p^*)$ 时,$W^{(-k)}=0,k=1,2,\cdots,n$。当 $p\in\delta(p^*)$ 时,$(-1)^{(n+1)}W^{(-n)}(p)>0$。代入上式,则有:

$V(X_1)-V(X_2)=(-1)^{(n+1)}\int_{\delta(p^*)}\{QI^{(n-1)}[p;U(X_1)]-QI^{(n-1)}[p;U(X_2)]\}W^{(-n)}(p)dp<0$,这与假设 $X_1\geq^{U}_{W^n\text{-SD}}X_2$ 矛盾。对于其他违反定理条件的假设可以采用类似的反证法来证明。

定理12的证明:类似定理11的证明,因为 $QI_{(k)}[1;U(X)]=0,k=1,2,\cdots$,反复运用分部积分法得:

$V(X)=\int_0^1QI_{(0)}[p;U(X)]W^{(-1)}(p)dp=-\int_0^1W^{(-1)}(p)dQI_{(1)}[p;U(X)]=\sum_{k=1}^{n-1}W^{(-k)}(0)QI_{(k)}[0;U(X)]+\int_0^1QI_{(n-1)}[p;U(X)]\times W^{(-n)}(p)dp$

再运用类似定理11的证明方法即可证明定理12。

注释:

①著名的有 AllaisParadox、EllsbergParadox 等,见 Varian,HalR.(1992)或 Quigin(1993)。

②明确提出随机占优概念并将其与期望效用联系起来的早期文献见 Quirk,J.P. 和 Saposnik,R.(1962),一阶和二阶随机占优三篇经典文献见 Hadar,J. 等(1969)、Hanoch,G. 等(1969)和 Rochschild 等(1970)。三阶随机占优见 White,G.A.(1970)或 Levy 等(1978)。Levy(1998b)将这些研究成果推广到任意阶的情形。关于传统随机占优的早期应用文献目录,请见 Bawa,V.(1982)。

③GeneralizedExpectedUtility,又称"NonExpectedUtility",Machian(1987)归纳介绍了多种广义期望效用理论。

④由于本文需要使用带括号的上下标同时表示高阶积分和高阶导数,为区别起见,用括号中整数前的符号区分积分和导数,正号表示积分,负号表示导数,整数表示积分或导数的阶次。关于效用函数高阶导数的经济含义请参阅 Tsiang(1972)。

⑤当转换函数为 $W(p)=p$ 时,$T^{(k)}(x;X)$ 就退化为 Yoshiba(2001)定义的高阶分布函数;$T_{(1)}(x;X)$ 相当于 Yaari,M.(1987)定义的"DecumulativeDistributionFunction"。

参考文献:

1. Artzner.P.,Delbaen,F.,JEber,J.andM.Heath,D.,1999.CoherentMeasuresofRisk.MathematicalFinance9 (July),pp.203 ～228.

2. Bawa,V.,1982.StochasticDominance:AResearchBibliography.ManagementScience28,pp.698 ～712.

3. Hadar,J.andRusell,W.,1969.RulesforOrderingUncertainProspect.AmericanEconomicReview,59,pp.25 ～34.

4. Hanoch,G.andLevy,H.,1969.TheEfficiencyAnalysisofChoicesInvolvingRisk.TheReviewofEconomicStudies,36,pp.335 ～346.

5. Levy,H.andKroll,Y.,1978.OrderingUncertainOptionswithBorrowingandLending.JournalofFinance,33,pp.552 ～573.

6. Levy,H.andWienter,Zvi,1998a.StochasticDominanceandProspectDominancewithSubjectiveWeightingFunctions.JournalofRiskandUncertainty,16(2),pp.147 ～163.

7. Levy,Haim,1998b.StochasticDominance:InvestmentDecisionMakingunderUncertainty.KluwerAcademicPublishes,1998.

8. Machina,M.J.,1982.ExpectedUtilityAnalysiswithoutIndependentAxiom.Econometrica,50,pp.277 ～323.

9. Machina,M.J.,1987.ChoiceunderUncertainty:ProblemsSolvedandUnsolved.JournalofEconomicPerspectives,1987,1,pp.121 ～154.

10. Prelec,D.,1998.TheProbabilityWeightingFuction.Econometreca,66,pp.497 ～528.

11. Markowitz,M.andHarry,March,1952.PortfolioSelection.JournalofFinance,Vol.7,No.1.

12. Markowitz,M.andHarry,March,1959.PortfolioSelection:EfficientDiversificationofInvestments,Wiley,NewYork.

13. Quigin,J.,1982.ATheoryofAnticipatedUtility.JournalofEconomicBehaviorandOrganisation,3(4),pp.323 ～434.

14. Quigin,J.,1993.GeneralizedExpectedUtilityTheory.TheRankDependentModel,KluwerAcademicPublishers,Boston.

15. Quirk,J.P.andSaposnik,R.,1962.AdmissibilityandMeasurableUtilityFunctions.TheReviewofEconomicStudies,29,pp.140 ～146.

16. RochschildandStiglitz,1970.IncreasingRisk.I.ADefinition.JournalofEconomicTheory,2,1970,pp.225 ～243.

17. Tsiang,S.C.,1972.TheRationaleofMeanStandardDeviationAnalysis,SkewnessPreference,andtheDemandforMoney.AmericanEconomicReview,62,pp.354 ～371.

18. Varian,HalR.,1992.MicroeconomicAnalysis,3rded.W.W.Norton&Company,Inc,pp.192.

19. Wang,S.S.andYoung,V.R.,1998.OrderingRisk:ExpectedUtilityversusYaari'sDualTheoryofRisk.Insurance:MathematicsandEconomics,22,pp.145 ～161.

20. Whitemore,G.A.,1970.ThirdDegreeStochasticDominance.AmericanEconomicReview,60,pp.457 ～459.

21. Yaari,M.,1987.TheDualTheoryofChoiceunderRisk,Econometrica,55(1),pp.95 ～115.

22. Yoshiba,ToshinaoandYamai,Yasuhiro,2001.ComparativeAnalysesofExpectedShortfallandValue-at-Risk (2):ExpectedUility MaximizationandTailRisk.Workingpaper,BankofJapan.

23. 唐爱国、秦宛顺:《广义随机占优单调一致风险测度和ES$^{(n)}$》,载《金融研究》,2002(4)。

24. 唐爱国、秦宛顺:《基于广义随机占优的经济福利测度——GINI系数与 Atkinson指数的推广与统一》,载《经济科学》,2003(1)。

(作者单位:北京大学光华管理学院 北京 100871)

(责任编辑:S)