关于嵌入信息动态模型的两个问题

童光荣

嵌入信息动态模型用于经济行为中的动态性质的研究有着显著的作用。但是，在时间序列信息动态模型中所常用的最小二乘法在这种情形下失效了，尤其是对嵌入信息模型中参数估计不能得到一致的估计量。鉴于此，近年来不少计量经济学者对此问题作过很多的研究和探讨，得到一些结果。这些对于我们研究动态模型有关的问题得到了很好的启发。

象通常的情况一样，嵌入信息动态模型具有干扰项的序列相关性，其中还引入带干扰的滞后内生变量的相关性。

这里，我们跟讨论时间序列模型的情形一样，对嵌入信息动态模型的不同估计的小样本不作分析，仅仅讨论大样本的情形甚至规模是趋于无穷的一些渐近性质。

1. 关于半渐近性的问题和初始观测值问题

1.1 关于半渐近性的问题

由于嵌入信息集合是二维的，我们可以从不同的角度扩充样本的容量，以便研究。首先，象时间序列模型的常规研究一样，我们扩充样本的时间容量，也就是令T趋于无穷。事实上，由于适用的嵌入信息集合大多数几乎包含N个个体大量的观测值，而且超过T的极限数，这显然是不合适的。

为此，我们假定取$N\to\infty$，而T是有限的，我们称这种有利于研究的行为叫不同估计的半渐近行为。

上述两个假定之下所蕴含的动态模型的形式如下：

$$Y_{it}=\delta Y_{i,t-1}+X'_{it}\beta+\mu_i+u_{it}\qquad(1.1)$$

$$i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T$$

从上面我们看出：

i) 当T是有限时，稳定的假设($|\delta|<1$)是不必要的，

ii) 另一方面，初始观测值Y_{i0}产生的过程是明确的。

1.2 初始观测值的问题

为了突出初始观测值状态的重要性，我们重新记模型为：

$$Y_{it}=\delta^t Y_{i0}+\sum_{j=0}^{t-1}\delta^j X'_{j\,t-j}\beta+\frac{1-\delta^t}{1-\delta}\mu_i+\sum_{j=0}^{t-1}\delta^j u_{j\,t-j}$$

$$=\delta^t Y_{i0}+\sum_{j=0}^{t-1}\delta^j X'_{j\,t-j}\beta+\frac{1-\delta^t}{1-\delta}\mu_i+\gamma_{it}\qquad(1.1')$$

由上式知内生变量Y_{it}是4个变量的和，第1个是与初始值有关的$\delta^t Y_{i0}$；第2个是与X的过去值和现在值有关；第3个是与个体作用成比例的$\frac{1-\delta^t}{1-\delta}\mu_i$，而最后是

$$\begin{cases}\gamma_{it}=\delta\gamma_{it-1}+u_{it}\\ \gamma_{it}=0\end{cases}\qquad(1.2)$$

从这点明显看出，当时间维数是有限时，初始值$\{Y_{i0},i=1,2,\cdots,N\}$影响估计的渐近行为。特别是这些初始观测值的外生性产生的问题。

假设我们考虑它们依赖个体作用μ_i，外生变量的过去值$X_{i,t-j}$和一个非连续相关的干扰u_{i0}，记为：

$$Y_{it}=f(x'_{i,t-j},\ \mu_i,u_{i0})\qquad(1.3)$$

那么，如果个体作用是固定的，初始观测值显示出外生性，因为它们明显地与模型(1.1)里的干扰是不相关的。

相反地，如果个体作用是随机的，那么，初始观测值是非外生的，因为它们与这些作用是有关的。现在我们考查这些干扰项。

我们假定Y_{i0}　$i=1,\cdots,N$为一组独立的同分布的随机变量且有二阶矩EY_{i0}^2以及它与μ_i相关的量：$EY_{i0}\mu_i$。那么随EY_{i0}^2和$EY_{i0}\mu_i$而定的这种模型的任意的最小二乘估计的渐近无偏性和方差与这些初始观测值的状态问题显得非常重要。

我们可以假设这些初始观测值实际上不取决于EY_{i0}^2和$EY_{i0}\mu_i$，它们可能是一些固定的常数。事实上：

$$EY_{i0}^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_{i0}^2;\qquad EY_{i0}\mu_i=0$$

Anderson 和 Hsiao 对初始观测值提出一个约束性的假定：

$$Y_{i0}=c+k_1\mu_i+k_2\mu_{i0}$$

—— 若$k_1=k_2=0$，初始观测值是固定的，而且是相等的。

—— 若仅仅$k_1=0$，它是纯粹的随机变量。

—— 若$C=0,k_1=(1-\delta)^{-1},k_2=(1-\delta^2)^{-1/2}$，自回归过程$Y_{it},i=1,2,\cdots,N;\ t=1,2,\cdots,T$是平稳的。

另外，在这些初始观测值的附近约束性的假定可以更加明确，特别是允许独立考虑μ_i和初始值之间的相关系数以及把$EY_{i0}\mu_i$作为参数估计来考虑。

必须注意到这些假定对所有初始观测值产生的过程与观测值的子序列保持不同，因为在它的定义中没有引入外生变量。

若我们考虑这些观测值的模型为：

$$Y_{i0}=c+X_{i0}^{'*}k_0+k_1\mu_i+k_2\mu_{i0}$$

其中$X_{i0}^{'*}$是外生变量，与子序列$X^{X'_{it}}$相关。

显然，在以上假定之下，由初始观测值产生的过程会影响误差分量模型的通常参数估计的半渐近性质。

2. 固定作用自回归模型的估计问题

这里利用固定作用详述两个形式，即当信息不是来自随机样本，相反地是或多或少耗散的；或者当个别作用证实与上些解释变量是相关的。

在这些情形里，如果模型呈现出动态的特征，动态固定作用的模型就可以考虑修改它的表述。

2.1 模型的表述

我们考虑的固定作用自回归模型如下：

$$Y_{it}=\delta Y_{i,t-1}+X'_{it}\beta+\alpha_i+u_{it}$$

$$i=1,\cdots,N;\quad t=1,\cdots,T$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

利用有关个体的所有观测值和时间周期，将模型记为矩阵的形式，有：

$$Y = \delta Y_{-1} + X\beta + D\alpha + u \qquad (2.1)$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \vdots \\ Y_{1T} \\ \vdots \\ Y_{NT} \end{bmatrix}; Y_{-1} = \begin{bmatrix} Y_{10} \\ \vdots \\ Y_1, F_1 \\ \vdots \\ Y_{N,T-1} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} X_{11}^{(1)} & \cdots & X_{11}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{1T}^{(1)} & \cdots & X_{1T}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{NT}^{(1)} & \cdots & X_{NT}^{(k)} \end{bmatrix};$$

$$D = I_n \otimes e_T, u = \begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1T} \\ \vdots \\ u_{NT} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$$

其中 e_T 是一$(T,1)$维的单位向量。

我们假定干扰就满足下列条件：

$E(u/Y_{-1}, X) = 0$； $V(u/Y_{-1}, X) = \sigma_u^2 I_{NT}$

也就是说干扰项是与解释变量不相关的而且不是序列相关和异方差的。

2.2 当 T 是有限时，WITHIN 变量的最小二乘估计的不相容性

即使模型的干扰项假定是独立分布的，当时间数 T 是有限的，这个模型的 WITHIN 变量的最小二乘估计是不相容的。(不一致的)

这里容易看到，利用 Frish—Waugh 定理，下面变换模型中系数 δ 和 β 的估计可以由最小二乘法得到。即变换模型为：

$$W_N Y = W_N Y_{-1}\delta + W_N X\beta + W_N u^{(*)}$$

其中 $W_N Y = I_N \otimes [I_T - \frac{J_T}{T}]$

那么，δ 和 β 的最小二乘估计可以记为 WITHIN 估计量：

$$\begin{bmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_{-1}W_N Y_{-1} & Y'_{-1}W_N X \\ X'W_N Y_{-1} & Y'W_N X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y'_{-1}W_N Y \\ X'W_N Y \end{bmatrix},$$

W_N 是幂等对称的矩阵。

当 $N \to \infty$ 时，我们有：

$$\underset{N\to\infty}{Plim} \begin{bmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} Y'_{-1}W_N Y_{-1} & \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} Y'_{-1}W_N X \\ \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} X'W_N Y_{-1} & \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} X'W_N X \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} Y'_{-1}W_N u \\ \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} X'W_N u \end{bmatrix}$$

实际上，根据与干扰项有关的假定和剩余估计的不相容性，我们有：

$$\underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} X'W_N u = 0 \qquad (2.2)$$

但是，

$$\begin{aligned} &\underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} Y'_{-1}W_N u \\ &= \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} \sum_i \sum_t (Y_{i\,t-1} - Y_{i,\,-1})(u_{it} - u_{i.}) \\ &= E\frac{1}{T} \sum_t (Y_{i\,t-1} - Y_{i,\,-1})(u_{it} - u_{i.}) \\ &= -\frac{1}{T^2} \frac{T - 1 - T\delta + \delta^T}{(1-\delta)^2} \sigma_u^2 \neq 0 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

这样，当周期数保持固定时，固定作用的自回归的最小二乘估计是不一致的(不相容的)。这个半不相容性的发生归结于当 $T \to \infty$ 时，$(Y_{i\,t-1} - Y_{i,\,-1})$ 和 $(u_{it} - u_{i.})$ 之间的渐近相关系数的存在。由于 $Y_{i\,t-1}$ 和 u_{it} 是不相关的，而其它每一个个体与 u_{it} 和 $Y_{i\,t-1}$ 是相关的，而且它们的协方差不为零。

由公式(2.3)显然有，当 N 和 T 趋于无穷时，这个估计量因而是一致的：

$$\underset{NT\to\infty}{Plim} \frac{1}{NT} Y'_{-1}W_N u = 0$$

因此，如果样本的周期性是足够大的，这个估计的有偏渐近性是更合理可信的。

2.3 工具变量的估计方法

固定作用模型的最小二乘估计的半非一致性可以表示为滞后变量和干扰项之间的渐近相关系数。跟传统的方法一样，借用工具变量法来阐述这个问题。首先我们把它应用于固定作用的自回归模型。

假设 Z 表示 $m(M \geqslant k+1)$ 个工具变量，X 的现在值和滞后值构成的矩阵，且定义工具变量集合为：

$$Z^* = (D,\ \ Z)$$

其中 D 是由个体作用引起的虚拟变量的集合。

那么，我们将知道模型(2.1)中的 α、δ 和 β 的工具变量估计是由对模型：

$$P_{Z^*}Y = P_{Z^*}D\alpha + P_{Z^*}Y_{-1}\delta + P_{Z^*}X\beta + P_{Z^*}u \qquad (2.4)$$

应用最小二乘法估计的参数而得到。其中：

$P_{Z^*} = Z^*(Z^{*\prime}Z^*)^{-1}Z^{*\prime}$ 是由 Z^* 生成的空间上的投影。

因为 $P_{Z^*}D = D$，这相当于模型

$$P_{Z^*}Y = D\alpha + P_{Z^*}Y_{-1}\delta + P_{Z^*}X\beta + P_{Z^*}u \qquad (2.5)$$

应用最小二乘法估计参数。

这样，根据 Frish—Waugh 定理，对模型：

$W_N P_{Z^*} Y = W_N P_{Z^*} Y_{-1}\delta + W_N P_{Z^*} X\beta + W_N P_{Z^*} u$ 使用最小二乘法得到 δ 和 β 的估计量。这里：

$$\begin{aligned} W_N &= I - P_D = I - D(D'D)^{-1}D' \\ &= I_N \otimes (I_T - \frac{J_T}{T}) \end{aligned}$$

此外，因为：

$$P_{Z^*} = P_D + P_{W_N}Z,$$

我们有：

$$\begin{aligned} W_N P_{Z^*} &= W_N(P_D + P_{W_N}Z) \\ &= W_N P_{W_N}Z \\ &= W_N[W_N Z(Z'W_N Z)^{-1}Z'W_N] \\ &= P_{W_N Z} \end{aligned}$$

于是，δ 和 β 的估计可以对模型：

$$P_{W_N Z} = P_{W_N Z}Y_{-1}\delta + P_{W_N Z}X\beta + P_{W_N Z}u$$

进行最小二乘估计而得到。也就是解决以下的极小化问题：

$$\underset{\delta,\beta}{Min}\, u'P_{W_N}u \qquad (2.6)$$

$$\Longleftrightarrow \underset{\delta,\beta}{Min}\, u'W_N Z(Z'W_N Z)^{-1}Z'W_N u$$

$$\Longleftrightarrow \underset{\delta,\beta}{Min} [\sum_i \tilde{U}_i' \tilde{Z}_i][\sum_i \tilde{Z}_i' \tilde{Z}_i]^{-1}[\sum_i \tilde{Z}_i' \tilde{u}_i]$$

其中：$\tilde{u}_t = [u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{iT}]'$，

$\tilde{Z}_i = [Z_{i1} - Z_{i.}, Z_{i2} - Z_{i.}, \cdots, Z_{iT} - Z_{i.}]'$，

如果 u'_{it} 是均值为零，方差为 $\delta^2 u$ 的独立的同分布的随机变量，那么：

$$\sqrt{N}(\bar{\gamma} - \gamma) \underset{N\to\infty}{\sim} N[0, \sigma^2 u[\underset{N\to\infty}{lim} \frac{1}{N} \tilde{X}'W_N Z(Z'W_N Z)^{-1}Z'W_N \tilde{X}]^{-1}]$$

其中 $\gamma = (\delta, \beta)'$，$\tilde{X}(Y_{-1}, X)$。

尽管干扰的方差 —— 协方差矩阵不是一个纯量($\sum = V(P_{W_N Z}u) = \sigma^2 u P_{W_N Z}$，但这个估计跟扩充的工具变量估计一样完全是有效的而且可以推得。事实上，这个结果在条件保证扩充的工具变量估计和常规的工具变量估计等价的情况下是可以得以的。因为我们可以记

$$\begin{aligned} \sum P_{W_N Z}\bar{X} &= [\sigma^2 u P_{W_N Z}][P_{W_N Z}\bar{X}] \\ &= [P_{W_N Z}\bar{X}][\sigma_u^2 I] \end{aligned}$$

其中 $\bar{X} = [Y_{-1}, X)]$。这样 α_i 可以由

$$\hat{\alpha} = P_0(Y - Y_{-1}\hat{\delta} - X\hat{\beta} \qquad (2.7)$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

来估计。即：$\hat{\alpha}_i = Y_i - \hat{\delta} Y_{i\cdot,-1} - X'_{i\cdot}\hat{\beta}$

固定作用自回归模型的参数一致估计的另一个方法就是将模型写成一阶差分的形式：

$$\Delta Y = \delta \Delta Y_{-1} + \Delta X'\beta + \Delta u \qquad (2.8)$$

也就是：

$$Y_{it} - Y_{i,t-1} = \delta(Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2} + [X'_{it} - X'_{i,t-1})]\beta + u_{it} - u_{i,t-1}$$

显然，最小二乘法不能给出这个模型参数的一致估计量，因为滞后的内生变量和干扰之间存在一个相关关系（$Y_{i,t-1}$ 和 $u_{i,t-1}$ 显然是相关的）。尽管如此，我们可以使用近似的工具变量法来解决这个问题。

这里不妨给出两个工具变量：

$Z_{1it} = [Y_{i,t-2}, X'_{it} - X'_{i,t-1}]$；

$Z_{2it} = [Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}, X'_{it} - X'_{i,t-1}]$

显然，变量 $Y_{i,t-2}$ 和 $\Delta Y_{i,t-2} = Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}$ 是有效的工具变量，因为它们与 $Y_{i,t-1} - Y_{i,t-2}$ 相关，但是与干扰 $u_{it} - u_{i,t-1}$ 是不相关的，因为上面我们已假定 u_{it} 的非自相关性。

然而，在一此简单的模型中，对于参数的一些线性组合，用 $\Delta Y_{i,t-2}$ 作为一工具变量，估计量的方差取非常高的值，因而由定义产生的矩阵是奇异的。所以与其说使用 $Y_{i,t-2}$ 不如把 $\Delta Y_{i,t-2}$ 作为一个工具变量。

这样，估计量可以由下面解最小化的问题而得到。即：

$$\underset{\alpha,\beta}{Min}[\sum_i \tilde{U}_i'\tilde{Z}_i][\sum_i \tilde{Z}_i'\tilde{Z}_i]^{-1}[\sum_i \tilde{Z}_i'\tilde{u}_i] \qquad (2.9)$$

其中 $\tilde{u}_i = [u_{i2} - u_{i1}, u_{i3} - u_{i2}, \cdots, u_{iT} - u_{i,T-1}]$

$\tilde{Z}_i = [\tilde{Z}_{i2}, \tilde{Z}_{i3}, \cdots, \tilde{Z}_{iT}]'$

$\tilde{Z}_{it} = [Y_{i,t-2}, X'_{it} - X'_{i,t-1}], t = 2, \cdots, T$

对于 u'_{it} 我们给出假定，当 $N \to \infty$ 时，它的渐近分布为：

$$\sqrt{N}(\hat{\delta} - \delta) \overset{N\to\infty}{\sim} N[0, \sigma^2 u[\underset{N\to\infty}{lim} \frac{1}{N}\tilde{Z}'\Delta X^2)^{-1}\tilde{Z}'\psi\tilde{Z}(\Delta\tilde{X}'\tilde{Z})^{-1}]]$$

其中：$\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \cdots, \tilde{Z}_N)', \Delta\tilde{X} = [\Delta Y_{-1}, \Delta X]$；

$$\psi = I_N \otimes \sum D = I_N \otimes \begin{bmatrix} 2 & -1 & \ddots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & -1 \\ 0 & \ddots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

因而模型(2.8)里的干扰项是 $MA(1)$ 模型。

对于模型(2.8)里的干扰项是 $MA(1)$ 模型形式的参数可以考虑更有效的估计量。但是，在这模型左乘 $\psi^{-1/2}$ 后导致干扰是 u'_{it} 的线性组合。对于这个变换了的模型，前面给出的 Y_{it} 的滞后值（或者差分 $\Delta Y_{it} - Y_{i,t-1}$ 不再是有效的。例如，如 $T = 5$，变换的模型可以记为：

$$\begin{bmatrix} 3\Delta Y_{i2} + 2\Delta Y_{i3} + \Delta Y_{i4} \\ 2\Delta Y_{i2} + 4\Delta Y_{i3} + 2\Delta Y_{i4} \\ \Delta Y_{i2} + 2\Delta Y_{i3} + 3\Delta Y_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\Delta Y_{i1} + 2\Delta Y_{i2} + \Delta Y_{i3} \\ 2\Delta Y_{i2} + 4\Delta Y_{i2} + 2\Delta Y_{i3} \\ \Delta Y_{i1} + 2\Delta Y_{i2} + 3\Delta Y_{i3} \end{bmatrix}\delta + \begin{bmatrix} 3\Delta X'_{i2} + 2\Delta X'_{i3} + \Delta X'_{i4} \\ 2\Delta X'_{i2} + 4\Delta X'_{i3} + 2\Delta X'_{i4} \\ \Delta X'_{i2} + 2\Delta X'_{i3} + 3\Delta X'_{i4} \end{bmatrix}\beta + \begin{bmatrix} 3\Delta u_{i2} + 2\Delta u_{i3} + \Delta u_{i4} \\ 2\Delta u_{i2} + 4\Delta u_{i3} + 2\Delta u_{i4} \\ \Delta u_{i2} + 2\Delta u_{i3} + 3\Delta u_{i4} \end{bmatrix}, \qquad (2.10)$$

显然，对于这个模型 $Y_{i,t-2}$ 不是，$Y_{i,t-2} - Y_{i,t-3}$ 也不是有效的工具变量。然而，如果 X 是一些严格的外生变量，那么可以利用差分 ΔX 的现在和滞后值或者由 $\psi^{-1/2}$（即 $\psi^{-1/2}\Delta X$）变换，对模型：$\psi^{-1/2}\Delta Y = \psi^{-1/2}[\Delta Y_{-1}\delta + \Delta X\beta + \Delta u]$ 进行估计时作为一个工具变量。

后面的一种情况相当于解下面的最小化问题：

$$\underset{\delta,\beta}{Min}[\sum_i \tilde{U}_i' \sum_D^{-1} \tilde{Z}_i][\sum_i \tilde{Z}_i' \sum_D^{-1} \tilde{Z}_i]^{-1}[\sum_i \tilde{Z}_i' \sum_D^{-1} \tilde{u}_i] \qquad (2.11)$$

其中，$\tilde{Z}_{it} = [\tilde{Z}_{i2}, \tilde{Z}_{i3}, \cdots, \tilde{Z}_{iT}], \tilde{Z}'_{it} = [X'_{i,t-1} - X'_{i,t-2}, X'_{i,t} - X'_{i,t-1}], \tilde{u}_i$ 同(2.9)里的定义一样。

这样得到的估计比原来的工具变量更有效，由对 $\tilde{u}_{it}$ 的假定，明显地有：

$$\sqrt{N}(\hat{\gamma} - \gamma) \overset{N\to\infty}{\sim} N[0, \sigma^2[\underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{N}(\Delta\tilde{X}\psi^{-1}\tilde{Z})^{-1}\tilde{Z})'\psi^{-1}\tilde{Z}(\tilde{Z}'\psi^{-1}\Delta\tilde{X})^{-1}]]$$

使用内生变量的滞后值与干扰之间所有的正交条件可以得到一更有效的一致估计量。

我们考虑一个固定作用模型的估计，使用的嵌入信息集合包括 5 个时间周期（$t = 0, \cdots, 4$）。

这样，我们可以记：

当 $t = 2$ 时，

$Y_{i2} - Y_{i1} = \delta(Y_{i1} - Y_{i0}) + (X'_{i2} - X'_{i1})\beta + u_{i2} - u_{i1}$，

当 $t = 3$ 时，

$Y_{i3} - Y_{i2} = \delta(Y_{i2} - Y_{i1}) + (X'_{i3} - X'_{i2})\beta + u_{i3} - u_{i2}$，

当 $t = 4$ 时，

$Y_{i4} - Y_{i3} = \delta(Y_{i3} - Y_{i2}) + (X'_{i4} - X'_{i3})\beta + u_{i4} - u_{i3}$。

于是，当 $t = 2$ 时，由上面叙述的理由知，$[Y_{i0}, X'_{i2} - X'_{i1}]$ 是有效的工具变量集合。当 $t = 3$ 时，所有的工具变量集合是有效的，，因为 Y_{i0} 和 Y_{i1} 是一对有效的工具变量；最后当 $t = 4$ 时，按照同样的方法可以定义有效的工具变量集合是 $[Y_{i0}, Y_{i1}, Y_{i2}, X'_{i4} - X'_{i3}]$。

那么，我们可以定义工具变量的完备集合：

$$\tilde{Z}_i = \begin{bmatrix} Y_{i0} & 0 & 0 & 0 & 0 & X'_{i2} - X'_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{i0}Y_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & X'_{i3} - X'_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{i0}Y_{i1}Y_{i2} & & 0 & 0 & X'_{i4} - X'_{i3} \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

而且最优估计可以由下述的最小化来解决，即：

$$\underset{\alpha,\beta}{Min}[\sum_i \tilde{U}_i'\tilde{Z}_i][\sum_i \tilde{Z}_i'\tilde{Z}_i]^{-1}[\sum_i \tilde{Z}_i'\tilde{u}_i]$$

尽管如此，同讨论以上模型(2.8)式中的干扰是 $MA(1)$ 形式一样，可知这些工具变量估计不是完全有效的。

如果我们定义一个拓广的工具变量如下：

$$\hat{\gamma} = [\Delta\tilde{X}'P_{\tilde{Z}}\Delta\tilde{X}]^{-1}[\Delta\tilde{X}'P_{\tilde{Z}}\Delta Y] \qquad (2.13)$$

这里：$P_{\tilde{Z}} = \tilde{Z}\Gamma\tilde{Z}'$，其中 $\Gamma = [\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{Z}'\sum_D\tilde{Z}_i]^{-1}$，$\tilde{Z}$ 和 $\Delta\tilde{X}$ 同(2.12)式和(2.9)式的定义一样。

我们就可以对下述模型：

$$\tilde{Z}'\Delta Y = \tilde{Z}'\Delta Y_{-1}\delta + \tilde{Z}'\Delta X\beta + \tilde{Z}'\Delta u \qquad (2.14)$$

应用工具变量法进行估计。或者，换句话说，取最小化：

$$\underset{\delta,\beta}{Min}[\sum_i \tilde{U}_i'\tilde{Z}_i][\sum_i \tilde{Z}_i' \sum_D \tilde{Z}_i]^{-1}[\sum_i \tilde{Z}_i'\tilde{u}_i] \qquad (2.15)$$

这样，当 $\tilde{u}_{it}$ 是非自相关时，这些估计在充分应用 Y_{it} 的带后值为工具变量得到的估计是最有效的。它的渐近分布是：

$$\sqrt{N}(\hat{\gamma} - \gamma) \overset{N\to\infty}{\sim} N[0, \underset{N\to\infty}{Plim} \frac{1}{N}(\Delta\tilde{X}'\tilde{Z})^{-1}\tilde{Z})'\psi^2(\tilde{Z}'\Delta\tilde{X})^{-1}]。$$

参考文献：

① T. W. Anderser & C. Hsiao (1982), Formulation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data, Journal of Econometrics, Vol. 18, pp. 578～606.

② R. Blundell & R. Smith (1989), Estimation and Testing in a Dynamic Panel Data Model, Mimeo.

③ C. Hsiao (1986), Analysis of Panel Data, Cambridge University Press.

④ A. Trognon (1988), Une Note Sur L'efficacité des Procédure en Deux éapes ia Essais en L'honneur d'E, Malinvaud, Economica, Paris.

（作者单位：武汉大学经济学系　武汉　430072）

（责任编辑：金　萍）

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net