

# 对伯川德博弈的 正式数学证明与扩展运用<sup>\*</sup>

魏 翔

**摘要：**法国经济学家伯川德提出了伯川德寡头模型。到目前为止，对该模型的证明方法主要采用分段讨论的方法，缺乏正式数学证明。为了从数学上对该模型进行正式证明，本文用广义函数中的冲激函数和阶跃函数来刻画间断需求函数，以弥补以往证明中只能对间断函数进行讨论而缺乏数学论证的缺陷。通过使用这种表达方式得到的数学证明表明：原始伯川德博弈的结论是近似的，严格意义上的纳什均衡点是双方都定价于比边际成本略微高一点的位置上，只有市场需求曲线为水平线时，均衡结果才收敛于伯川德博弈。使用同样的方法，斯威齐模型的间断点可以由阶跃函数来刻画，数学证明显示，在动态上，寡头间可能存在弯折的需求曲线。

**关键词：**伯川德博弈 冲激函数 阶跃函数

## 一、文献综述

早在 1883 年，法国经济学家伯川德 (J. Bertrand) 提出了一个寡头竞争模型——伯川德博弈。该模型有四个假设条件：(1) 市场中只有两家寡头企业，两家企业的产品对于消费者来说是无差异的，市场需求为  $Q=D(P)$ ；(2) 假设生产的单位边际成本相同，无固定成本，并且没有生产能力的限制，即企业可以无限的生产；(3) 企业之间只进行一次竞争，并且同时进行定价决策；(4) 没有其他企业进入市场。该模型研究的是多人决策问题，决策变量是价格，双方只进行一次决策，决策结果的均衡点是双方的定价都等于边际成本，即双方都只赚取正常利润。

尽管这个模型已经提出了一百多年，并且为寡头企业提供了很有意义的决策帮助，但是到目前为止，该模型还没有被严格地用数学函数进行刻画，大部分证明方法将证明过程的重点放在了推演和讨论上，而非严格的数学证明。

国外学者对该模型的证明较早，但是大部分的重点都放在了对两个寡头的定价的讨论上，并基于此得出模型的均衡结果，关于其数学严密证明的内容非常鲜见。例如杰弗瑞·杰里和菲利普·瑞尼 (Jehle & Reny, 2002) 提出的证明方法：设寡头需求函数为线性，用分段函数刻画了寡头的利润函数，然后通过对两寡头定价的相对比较分析各寡头定价高低的利弊，分析出各寡头在追逐利润最大化的前提下

的定价动机，最终得出模型平衡时寡头的定价。埃尔玛·沃夫斯岱特 (Elmar Wolfstetter, 1999) 在其著作中提出的证明方法是对利润函数用分段函数刻画，之后通过定性推演和讨论得出模型平衡时的结果。相对而言，TuinstraJan (2004) 的证明方法考虑了垄断竞争市场的企业对价格的调整过程，他指出，企业由于不能完全预测市场的需求量，所以要通过在过去价格上的需求来推导出一条线性的需求曲线，再根据这一需求曲线制订出一个更合理的价格，进一步对这一动态价格调整过程进行数值模拟，会发现如果价格的交叉影响和需求曲线的斜率都很小，市场的最终价格是会聚在伯川德的纳什均衡价格点上的。TuinstraJan 证明的突出之处在于他考虑了价格的动态路径，但由于缺乏对需求函数动态变化的连续刻画，而只是运用实证角度通过一系列数值模拟的方法，因而他无法严格地证明价格收敛的路径。另有 Kwang-Ho Lee 和 Baldick Ross (2003) 提出可以通过建立一个用于解决所有不完全竞争中的纳什均衡解的值的支付矩阵模型，进而求解到伯川德博弈中的纳什均衡解。但这一模型是从两个以上的企业的竞争求解出发的，因而与此处的严格的伯川德博弈仍有区别，而且求解的过程并不能很好地说明为何会达到纳什均衡解，而是首先假设纳什均衡解是存在的。

国外文献的另一个重点是围绕伯川德博弈的含义和特征以及如何破解博弈进行讨论。例如，Amir

<sup>\*</sup> 本文受到“教育部优秀人才支持计划”和“北京市属市管高等学校人才强教计划”资助。

Rabah、Grilo Isabel 和 Jin Jim (2004) 指出,伯川德博弈的特征之一就是满足需求的价格弹性是对于价格的非减函数。Jun Byoung 和 Vives Xavier (2003) 指出,在 Markov 的完美均衡中,能够为企业提供的优于伯川德竞争结果的结果。博弈的解释方面,较有代表性的是, Furth Dave (2003) 提出通过建立在企业间可以有“价格中心原则”(主要是对不同的顾客实行价格歧视)的合谋的基础上,用一个“伯川德 - 埃奇沃斯”模型来解决博弈。

国内学者在对寡头市场的研究中涉及到关于伯川德博弈的证明问题,证明方法仍然是将重点放在了分情况讨论上,而缺乏严格的数学证明。例如李明志和柯旭清 (2004) 在其著作中提到的一种证明方法:该方法用分段函数刻画了寡头的需求函数,然后通过对两个寡头所定的价格进行比较,根据不同的情况分别进行说明,运用反证法最终得出该模型在平衡时的情况是  $p_1 = p_2 = c$  ( $p_i$  是寡头  $i$  对产品的定价)。张长温 (2004) 通过对模型进行讨论,说明  $p_1 = p_2 \neq c$  及  $p_1 \neq p_2$  时模型极不稳定,得出只有在  $p_1 = p_2 = c$  时才稳定。此外,还有一部分学者在对假设条件进行了部分修改后给出了该模型的证明方法,且根据纳什均衡的结论  $p_1 = p_2$  来反推出两寡头的价格。例如,谢识予 (2002) 提出的一个证法:假设产品有一定差别(替代性极强,但不是完全替代),建立的寡头需求函数是以  $p_1$  和  $p_2$  两者为自变量的函数,然后运用反应函数证明该模型,最终得出均衡时的两个寡头的定价。但此时的伯川德博弈已经是引入了产品差异性的被破解了前提条件的模型,而不是原来的“伯川德博弈”了。类似的证明还有朱善利 (2001) 的证明方法:同样假设产品可相互替代,设寡头的需求函数是以  $p_1$  和  $p_2$  两者为自变量的函数,最终得出寡头的定价。

到目前为止,关于伯川德博弈的证明方法中,基本上都是运用分段函数来描述寡头的需求函数,运用反证法及分析、讨论来得出最终的结果,而缺乏一个严密的数学函数来刻画寡头的需求函数及严密的数学证明过程。本文试图通过运用阶跃函数和冲激函数的特殊性质对寡头的需求函数进行严密的刻画,进而对该模型进行严格的证明。并在此基础上,通过对斯威齐模型在该方法上进行新证明和动态讨论,结果显示,将阶跃函数和冲激函数引入模型,可以很好地修补短段函数在经济学分析中的非优良数学特性,从而在数学上对此类问题进行更为严格的证明,尤其便于对此类问题进行深入的动态讨论和分析。

## 二、进行严格证明的函数基础:冲激函数和阶跃函数

伯川德博弈之所以没有得到较为严格的数学证明和数学讨论,在于经济学家们没有找到合适的函数来反映经济行为的“间断”现象。而数学中的

广义函数对该类现象有很好的“拟合”性质。

在动态线性系统中,奇异函数表示函数或函数的导数或高阶导数出现奇异值(趋于无穷),是数学上广义函数的一种。冲激函数就是典型的奇异函数。

冲激函数可以用  $\delta(t)$  表示,其一般定义是:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

其中,  $t$  一般表示时间,也可以是其他连续的量。

在数学上,冲激函数的泛函表达式是:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0) \dots\dots\dots (2)$$

其中  $g(t)$  为任意在  $t=0$  处连续的函数。冲激函数的图形如下:

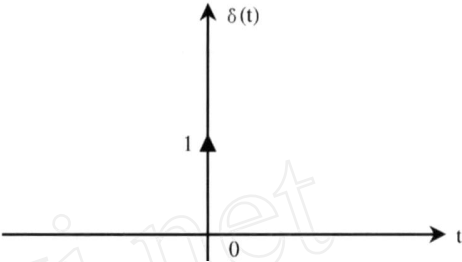


图 1 冲激函数  $\delta(t)$  的图像

在数学上,满足泛函定义式(2)的函数叫广义函数,这样,冲激函数就有了坚实的数学基础。冲激函数具有“强度”,其强度就是函数对自变量的积分,例如  $A\delta(t)$  表示冲激函数的强度为  $A$ ,即  $\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t) dt = A$ 。根据定义式,冲激  $A$  函数可以做任意延迟,假设其延迟为正向的  $t_0$  单位,则其泛函定义式为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) g(t) dt = g(t_0) \text{。其图形为:}$$

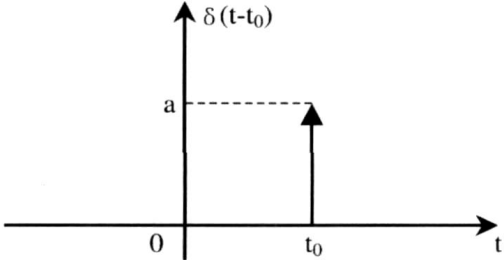


图 2 延迟冲激函数  $\delta(t-t_0)$  的图像

通过定义冲激函数,可以进一步定义一类对经济数学更有意义的函数,即阶跃函数。在经济学中,分段函数十分常见,其基本形式可以典型化如下:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

这类函数在数学上可以用冲激函数这样的泛函函数定义如下:  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ , 或更为一般地, 有  $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$ 。此类函数由于可以被冲激函数定义,并具有图 3 所示的形状,因此被称作“阶跃函数”。

数”,并具有一些在经济学上有重要意义的性质。更为重要的是,它具备严格的数学形式,可以准确地刻画分段函数。

显然,阶跃信号在  $t=0$  处有间断点,为了使之具有经济意义,我们可以定义此点的数值为  $a$ 、 $a/2$  或  $0$ 。和冲激函数类似,阶跃函数可以做任意延迟,表达式为:

$$u(t-t_0)=\begin{cases} 1, & t>t_0 \\ 0, & t<t_0 \end{cases}$$

其图形见图 4。

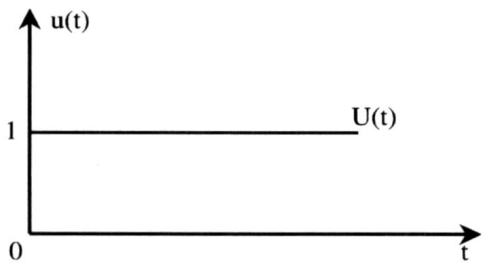


图 3 阶跃函数  $u(t)$  的图像

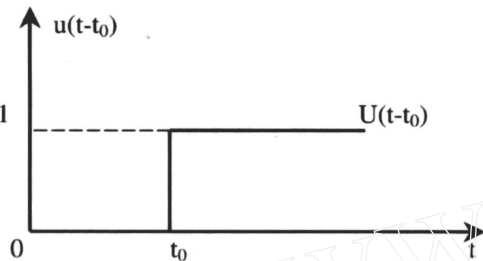


图 4 延迟阶跃函数  $u(t-t_0)$  的图像

利用阶跃函数与延迟阶跃函数,可以描述任意的方波状函数。例如,图 5(a) 所示的方波状函数可写作  $f(t)=u(t-T)-u(t-2T)$ ,其图形可由图 5(b) 的两个延迟阶跃信号叠加而来。

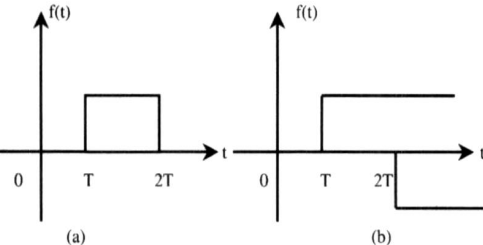


图 5 用延迟阶跃函数表示的方波状函数

同样,阶跃信号也可以有“强度”,表示为  $Au(t)$ ,其中  $A$  代表强度。阶跃函数还具有“单边性质”,即任意函数一旦与阶跃函数相乘后即变为单边函数,其过程如图 6 所示:

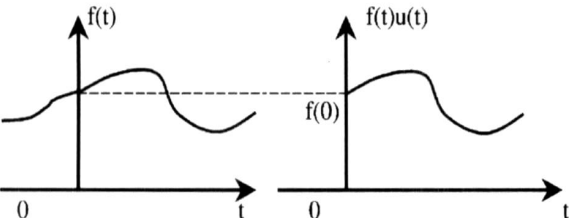


图 6 阶跃函数的单边性质

### 三、正式数学证明与相关修正

在相关文献中,由于伯川德博弈证明中将厂商的利润设定为其产品的间断函数(蒋殿春,2000),因此该模型没有得到严格的数学意义上的证明。因为传统经济学中没有处理间断函数的成熟工具。现在,利用冲激函数和阶跃函数的性质就可以对这个遗憾加以弥补。

证明伯川德博弈的关键是要对寡头源于同质产品的间断型需求函数用性质完好的函数加以刻画,以之代替不是很严密的用直观图形推演或分情况讨论。

伯川德博弈中两个寡头的反应机制和结果是:市场上只有寡头 1 和寡头 2,经营同质产品,边际成本为  $c$ ,如果寡头 1 的售价  $p_1$  小于寡头 2 的售价  $p_2$ ,则寡头 1 得到全部市场需求量;如果寡头 1 的售价  $p_1$  大于寡头 2 的售价  $p_2$ ,则寡头 1 得到的需求量为零。同样的法则也适应于寡头 2。如果二者的售价相同,则各自得到一半的市场需求量(这个条件并不是决定性的(Tirole,1998))。即消费者在价格相等时在两家寡头处消费,否则只会在一家寡头处消费,因此市场的需求函数可以表示为价格函数(Tirole,1998)。

证明:寡头 1 在伯川德博弈机制下的需求函数可以用阶跃函数表示为  $u(p_2-p_1) \cdot D(p_1)$ 。同理有寡头 2 的需求函数为  $u(p_1-p_2) \cdot D(p_2)$ 。并定义间断点  $p_1=p_2$  处  $u(p_2-p_1)=u(p_1-p_2)=1/2$ 。由此也可知,在  $p_1=p_2$  处,  $\delta(p_2-p_1)=\delta(p_1-p_2)=1/2$ ,则伯川德博弈(即寡头 1 和寡头 2 分别选择  $p_1$  和  $p_2$  以最大化各自的利润  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$ ) 可以方便地按完全信息静态博弈的正规方式表示为:

$$\begin{aligned} \max \Pi_1(p_1-c) u(p_2-p_1) \cdot D(p_1) \\ \max \Pi_2(p_2-c) u(p_1-p_2) \cdot D(p_2) \end{aligned}$$

该博弈的求解就是求解联立的偏微分方程:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1}=0 \text{ 且 } \frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2}=0$$

$$\begin{aligned} \text{即: } & u(p_2-p_1) [D(p_1) + (p_1-c) D'(p_1)] \\ & = (p_1-c) \delta(p_2-p_1) D(p_1) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{且 } & u(p_1-p_2) [D(p_2) + (p_2-c) D'(p_2)] \\ & = (p_2-c) \delta(p_1-p_2) D(p_2) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

根据  $p_1$  和  $p_2$  的相对大小,方程组(3)式和(4)式有三种解状态:

状态 1:  $p_1=p_2=p \geq c$ 。此时,由(3)式和(4)式得:

$$p_1=c+\frac{D(p_1)}{D(p_1)-D'(p_1)} \dots\dots\dots (5)$$

$$p_2=c+\frac{D(p_2)}{D(p_2)-D'(p_2)} \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{则 } p_1^*=p_2^*=p^*=c+\frac{D(p^*)}{D(p^*)-D'(p^*)}$$

由市场需求函数的形态可知,

$$0 \leq \frac{D(p^*)}{D(p^*)-D'(p^*)} < 1, \text{ 所以有:}$$

$$p_1^*=p_2^*=c+\delta, \delta \in [0,1) \dots\dots\dots (7)$$

此时的解状态是稳定的,因为寡头 1 和寡头 2 都没有动机离开这个状态。该原因的直观解释是,“伯川德博弈”假设博弈双方都具有完全信息,所以,理性的参与人必然会预测到如果自己为了独占市场而总是将价格定得低于对方,则“价格战”的结果将是大家都没有利润,尽管双方可以均分市场。所以,一个比“伯川德博弈”的均衡解( $p_1^* = p_2^* = c$ )的帕累托改进解是两个寡头各自根据市场需求曲线的形状和斜率(即根据市场需求量和变化趋势)制定一个彼此相同但却高于边际成本(从而双方都有利可图)的价格。而只有在市场的需求曲线为水平线时(此时类似于产品市场已经是完全竞争的,市场价格为外生给定),两寡头的均衡解此时才会收敛于“伯川德博弈”的均衡解( $p_1^* = p_2^* = c$ ),此时双方的利润为零。

状态 2:  $p_2 > p_1 \geq c$ 。此时由阶跃函数在间断点的定义和冲激函数的定义可知,

$$p_1 = p_2 \text{ 时, } \delta(p_1 - p_2) = \delta(p_2 - p_1) = 1/2$$

$$p_1 \neq p_2 \text{ 时, } \delta(p_1 - p_2) = \delta(p_2 - p_1) = 0。$$

因此,在该种情况下满足(3)式和(4)式同时成立的解状态为:

$$p_2^* > p_1^* = c + \frac{D(p_1)}{-D'(p_1)}$$

但是,该解状态是不稳定的,因为在这种情况下,寡头 1 获得正利润,而寡头 2 获得零利润。一方面,出于完全信息和完全理性,寡头 2 即便总是将价格降到寡头 1 的价格之下,经过“价格战”,二者都得不到正利润,但这种行动并没有使寡头 2 的状况和原来相比出现恶化,因此寡头 2 有动机这样做;另一方面,寡头 2 还可以将价格降到和寡头 1 的价格一致的位置上,进入解状态 1,如上所述,在状态 1,双方都没有动机改变现状。由此可知,在状态 2,寡头 2 有动机改变现状,所以状态 2 是不稳定的。

状态 3:  $p_1 > p_2 \geq c$ 。此时的解状态是:

$$p_1^* > p_2^* = c + \frac{D(p_2)}{-D'(p_2)}$$

类似于对状态 2 的分析,可知,状态 3 也是不稳定的。

综上所述,可以发现,只有状态 1 是唯一稳定的解状态,也就是该博弈唯一的纯战略纳什均衡解。

由此可以对“伯川德博弈”修正如下:

“伯川德博弈”的完整情形是,如果市场需求曲线是正常的形状(非水平),则价格均衡于高于边际成本  $c$  处;如果需求曲线是水平线,则均衡价格等于边际成本。

基于参与人的完全信息和完全理性(这也是“伯川德博弈”的原始假设),参与人并不会如原始的“伯川德博弈”所预见的那样,如同寡头间进行了完全竞争的“价格战”,将价格定在边际成本处。正式证明显示,该模型中并不存在零利润均衡,博弈实际均衡于双方都获得微小正利润处。该市场仍然表现出不完全竞争的某些特征。

为什么正式数学证明和以往的证明之间会出现

差异呢?主要原因在于:

第一,以往的证明由于无法用广义函数来“连续地”刻画分段函数或间断函数,因此只能用分段讨论的方法来解析参与人之间的定价策略,而对于间断点处的讨论要么被忽略了要么在技术上无法涉及,于是,对参与人定价行为的解析是非连续的,必然遗漏一些战略细节。比如,考虑到定价的最小单位是 1 元,当一个参与人将价格定为  $c+1$  元时,另一个参与人只有两个选择,要么一同定价为  $c+1$  元,要么展开“价格战”,将价格定为  $c$  元。但掌握完全信息的双方一定会发现,降价 1 元尽管能获取全部市场,但却失去利润,这将促使它选择定价为  $c+1$  元。

第二,阶跃函数实际上是将定价于零利润处和非零利润处两种离散状态连续化了,这就可以细致考察价格在离散变化时利润曲线的连续变化,从而我们发现,离散的价格变化并不一定会使博弈出现非此即彼的情形,考虑到连续变化的情况,博弈结果就不一样了。

#### 四、扩展性运用: 斯威齐模型的证明与动态讨论

运用基于冲激函数和阶跃函数的函数刻画方法,不但可以精练地证明伯川德博弈,而且可以用来处理一般性的关于分段函数的数学证明与推演。一个典型的运用是对“斯威齐模型”(Sweezy,1939)关于折弯的需求曲线的数学证明。

在相关文献中,基于和伯川德博弈证明中的同样困难,即伯川德不现实地将厂商的利润设定为其产品的间断函数(蒋殿春,2000),斯威齐模型同样没有得到严格的数学意义上的证明,因为传统经济学中没有处理间断函数的成熟工具。现在,利用冲激函数和阶跃函数的性质就可以对这个遗憾加以弥补。更为重要的是,通过用函数来严格刻画模型的间断性后,我们还可以对模型加以动态化的深入讨论,这在此前的技术水平下是无法进行的。

总体上说,阶跃函数以及其单边性质和导数特性可以用来处理所有和间断函数相关的经济问题。

证明斯威齐模型的关键是要对寡头间“跟跌不跟涨”的间断型的价格策略用性质完好的函数加以刻画,以之代替不是很严密的用直观图形推演或分情况讨论。

寡头 1 和寡头 2 的“跟跌不跟涨”的价格策略可以描述为:

$$\dot{p}_1 = -(p_1 - p_2)u(p_1 - p_2) \dots\dots\dots (8)$$

$$\dot{p}_2 = -(p_2 - p_1)u(p_2 - p_1) \dots\dots\dots (9)$$

并令间断点  $p_1 = p_2$  处  $u(p_1 - p_2) = u(p_2 - p_1) = 1$ 。按照斯威齐模型的假设,初始状况为  $p_1^0 = p_1(0)$ ;  $p_2^0 = p_2(0)$  ( $p_1(0), p_2(0) >$  单位成本  $c$ )。

其中:  $p_i$  = 寡头  $i$  的产品价格,是时间  $t$  的函数,即  $p_i = p_i(t)$ ,  $t=1,2$ ;  $u(t)$  是“阶跃信号函数”,且有  $du(p_1 - p_2)/dp_1 = \delta(p_1 - p_2)$ 。

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = 0 \end{cases}$$

得系统(8)、(9)的均衡点: $p_1^* = p_2^* = a$  ( $a$  为任意正常数)。

因为(8)式、(9)式在均衡点处的雅可比矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} (P_2 - P_1)\delta(P_1 - P_2) - u(P_1 - P_2) & (P_1 - P_2)\delta(P_1 - P_2) + u(P_1 - P_2) \\ (P_2 - P_1)\delta(P_2 - P_1) + u(P_2 - P_1) & (P_1 - P_2)\delta(P_2 - P_1) - u(P_1 - P_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, -1 \end{pmatrix}$$

所以,在均衡点附近对系统(3)、(4)进行线性化,

$$p_1^* = p_2^* = a = [p_2(0) + p_1(0)]/2$$

得:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -(p_1 - a) + (p_2 - a) \dots\dots\dots (10) \\ \dot{p}_2 = (p_1 - a) - (p_2 - a) \dots\dots\dots (11) \end{cases}$$

上述系统的系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} -1, 1 \\ 1, -1 \end{pmatrix}$$

由  $A - \lambda E = 0$  ( $E$  为单位矩阵)得  $A$  的特征值为:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

由  $(A - \lambda E)v = 0$  得  $A$  的特征向量为:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

系统的通解为:

$$p_1(t) = C_1 + C_2 e^{-2t} + a$$

$$p_2(t) = C_1 - C_2 e^{-2t} + a \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数})$$

将初始条件  $p_1^0 = p_1(0)$ 、 $p_2^0 = p_2(0)$  代入上式,

得:

$$C_1 = [p_2(0) + p_1(0)]/2 - a$$

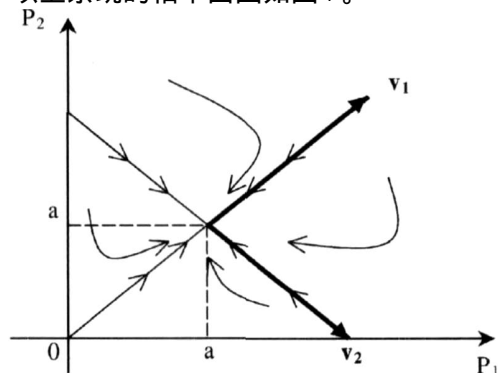
$$C_2 = [p_1(0) - p_2(0)]/2$$

通解为:

$$p_1(t) = [p_2(0) + p_1(0)]/2 + [p_1(0) - p_2(0)]e^{-2t}/2 \dots\dots\dots (12)$$

$$p_2(t) = [p_2(0) + p_1(0)]/2 - [p_1(0) - p_2(0)]e^{-2t}/2 \dots\dots\dots (13)$$

以上系统的相平面图如图 7。



注:粗箭头表示特征向量的方向;细箭头表示系统动态的解路径。

图 7 系统线性化后的相图

由图 7 和(12)式、(13)式。可知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (a, a) = \lim_{t \rightarrow \infty} (p_2(t), p_1(t))$$

$$a = [p_2(0) + p_1(0)]/2$$

由上可知:系统(3)、(4)在

处是局部渐进稳定的。

由于  $\det(A) = 0$ , 同时根据 Liapunov 对线性化的定理可知,系统(10)、(11)中的不稳定点,在系统(8)、(9)中有可能是稳定点,即  $p_1^* = p_2^* = a$  不一定是系统唯一的均衡点,但是,在系统(8)、(9)中,由阶跃信号函数的性质知:当  $p_1 = p_2$  时,  $u(x)$  不会为零,这就排除了多个均衡点的存在,因此  $p_1^* = p_2^* = a$  是系统唯一的均衡点,也是全局渐进稳定的均衡点。

结论:从以上过程,尤其是由(12)、(13)式可以看出,如果初始状态不在均衡点,则随着时间的推移,寡头们的价格会逐渐趋于一致,并保持稳定不变;如果初始状态就在均衡点,则这一价格点将不再变化,一直稳定在该点,即寡头们制定一个稳定的价格后很少变更价格,价格具有“粘性”。这正是斯威齐模型的最终结论。在此得到严格的数学证明。

## 四、简要总结

本文将属于广义函数的阶跃函数和冲激函数用来严格地刻画分段函数,从而可以对伯川德博弈的利润函数进行直接计算,而不是分情况做定性讨论。

本文从数学上严格证明了伯川德博弈的结果,并说明,伯川德博弈的均衡点严格地说来是双方都定价于比边际成本高出一个相同的极小量的位置上,这个极小量可以比最小货币结算单位还要小,因此实际中可以被忽略。但这一结论却说明了寡头在理论上是有极小利润的,从而解开了“如果两个寡头都没有利润,他们为什么要进入?”的悖论。在此基础上,本文讨论了当市场需求曲线处于不同情况时,博弈结果的收敛性。

最后,本文通过将相同方法运用到对斯威齐模型的证明中,显示了该方法可以很好地转换经济学中的分段函数,以便可以用数学方法对之进行博弈分析以及进一步的动态分析。

注释:

在本文第三部分我们证明了,当市场需求曲线  $D(p)$  为一水平线时,最终价格才会收敛于伯川德的纳什均衡价格点上。

国内外文献中关于证明方法的显著区别不在于方法思路,而是对需求函数的设定不尽相同。国外无论是对模型的理解、证明还是运用中,需求函数一般都被设为指数形式(如  $D(p_1, p_2) = e^{-p_1/p_2}$ ),这与国内普遍设为线性的假设很不同。而在本文的证明方法中,需求函数的形式可以是任意类型的。

## 参考文献:

1. 蒋殿春:《高级微观经济学》,北京,经济管理出版社,2000。
2. 李明志、柯旭清:《产业组织理论》,北京,清华大学出版社,2004。
3. 谢识予:《经济博弈论》,上海,复旦大学出版社,2002。
4. 张长温:《库诺特(Cournot)模型与博弈理论》,载《济南大学学报》(自然科学版),2004(2)。
5. 朱善利:《微观经济学》,北京,北京大学出版社,2001。
6. Rabah, Amir; Isabel, Grilo and Jim, Jin, 2004. "Demand-Induced Endogenous Price Leadership." "International Game Theory Review, Sep-Dec 99, Vol. 1, Issue 3/4, pp. 219-222.
7. Wolfstetter, Elmar, 1999. Topics in Microeconomics: Industrial Organization, Auctions and Incentives. Cambridge University Press.
8. Dave, Furth, 2003. "The (Price) Core of a Bertrand Edgeworth Economy." "Journal of Economics, Vol. 78, Issue 1, pp. 57-93.
9. Jehle, Geoffrey A. and Reny, Philip J., 2001. Advanced

Microeconomic Theory, 上海, 上海财经大学出版社。

10. Jun, Byoung and Xavier, Vives, 2003. "Strategic Incentives in Dynamic Duopoly." "Journal of Economic Theory, June, Vol. 116, Issue 2, pp. 249-282.
11. Kwang-Ho Lee and Baldick, Ross, 2003. "Solving Three-Player Games by the Matrix Approach with Application to an Electric Power Market." "Journal of Economic Theory, June, Vol. 116, Issue 2, pp. 212-233.
12. Tirole, 1988. The Theory of Industrial Organization. Massachusetts Institute of Technology.
13. Jan, Tuinstra, 2004. "A Price Adjustment Process in a Model of Monopolistic Competition." "International Game Theory Review, Sep., Vol. 6, Issue 3, pp. 417-441.

(作者单位:中国人民大学商学院 北京 100872  
北京第二外国语学院旅游管理学院 北京 100024)  
(责任编辑:陈永清)

(上接第 13 页)实现公平分配的手段,目的是实现公平竞争、最优的效率和最公平的分配,最终实现社会主义;限制权力过分集中,阻止政府向官僚主义化发展,促进民主化发展进程;实现劳动者自治,防止劳动异化的发生。因此,市场社会主义的核心是将市场机制与社会主义结合起来,利用市场机制实现社会主义的目的。市场社会主义就是社会主义经济制度与市场机制相结合,运用市场机制来实现社会主义的目的。这一概念表明,市场社会主义是一个二阶概念,它表示市场社会主义是在一种能够提供最优经济效率的社会制度中充分实现社会主义的价值与目标。社会主义的价值与目标是分配平等、社会公正、自主自由、充分就业等,而市场能够使经济效率最优化。简言之,市场社会主义就是平等加效率。市场社会主义包含将社会主义与市场机制相结合的各种社会主义经济理论及其经济制度,而不论其结合的程度。从 20 世纪 30 年代兰格提出的“竞争的社会主义”经济理论到 90 年代以来西方国家出现的各种将社会主义经济原则与市场经济相联系的经济理论,都可以归入市场社会主义理论;前南斯拉夫和匈牙利等东欧国家在 50-60 年代进行社会主义经济改革后形成的经济体制以及 90 年代以来由计划经济向市场经济过渡的转型国家,都是市场社会主义经济体制。

## 注释:

《马克思恩格斯选集》,中文版,第 3 卷,633、660 页,北京,人民出版社,1995。

② Włodzimierz Brus and Kazimierz Laski, 1989. From Marx to the Market: Socialism in Search of Economic System. Oxford University Press, pp. 27, 135-195.

Von Mises, 1935. "Economic Calculation in the Socialist Commonwealth," F. Hayek, Collectivist Economic Planning. London: Routledge and Kegan Paul, p. 111.

[奥]弗里德里希·冯·维塞尔:《自然价值》,中文版,108~112 页,北京,商务印书馆,1982。

Oskar Lange, 1936. "On the Economic Theory of Socialism." "The Review of Economic Studies, Vol. 4, No. 1, p. 67.

[美]保罗·R. 格雷戈里、罗伯特·C. 斯图尔特:《比较经济制度学》,中文版,16 页,北京,知识出版社,1988。

《新帕尔格雷夫经济学大辞典》,中文版,第 3 卷,北京,经济科学出版社,1996。

[美]约瑟夫·E. 斯蒂格利茨:《社会主义向何处去——经济体制转型的理论与证据》,中文版,10 页,长春,吉林人民出版社,1998。

《不列颠百科全书》,中文版,第 10 卷,492 页,北京,中国大百科全书出版社,1999。

⑪⑫⑭ [英]索尔·埃斯特林、尤里安·勒·格兰德:《市场社会主义》,中文版,2、1、28~29 页,北京,经济日报出版社,1993。

⑬ Selucky, R., 1979. Marxism, Socialism and Freedom: Towards a General Democratic Theory of Labour-Managed Systems. London: Macmillan, p. 181.

⑭⑮ 纪军:《匈牙利市场社会主义之路》,9、8 页,北京,中国社会科学出版社,2000。

⑯⑰⑱ [英]克里斯托弗·皮尔森:《新市场社会主义——对社会主义命运和前途的探索》,中文版,104、107、110 页,北京,东方出版社,1999。

⑲⑳ 亚诺什·科尔内:《通向自由经济之路》,中文版,45 页,台北,远流出版公司,1994。

㉑㉒ 俞可平:《全球化时代的“社会主义”》,155、154 页,北京,中央编译出版社,1998。

㉓ David Miller, 1989. Market, State and Community: Theoretical Foundations of Market Socialism. Oxford: Clarendon, p. 9.

㉔ John E. Reomer, 1994. A Future for Socialism. Cambridge: Harvard University Press, pp. 11-17.

㉕㉖ [波]弗·布鲁斯:《社会主义所有制与政治体制》,中文版,58、493 页,北京,华夏出版社,1989。

(作者单位:南开大学经济学系 天津 300071)  
(责任编辑:曾国安)