证券投资风险与收益的量化分析

马兰　殷俊

一、投资的风险收益

投资的概念在不同的范围其涵义有所不同。从投资结果理解，“投资”就是在一定时期内新增加的固定资产、耐用消费品等，如固定资产投资、基建投资等；从投资对象来看，可以划分得更细，这种划分不考虑投资结果或手段如何，只要花费一定的资金或财物用于某种对象即可称为投资，如购买房屋则是房产投资，花钱受教育则称为教育投资，购买有价证券的行为则叫证券投资。尽管投资的概念使用广泛，但投资一般都包含有两层含义：（1）投资是为了获得“预期”的报酬或收益；（2）由于“预期”收益的不确定性，能否获得收益不能事先知道，所以投资必须承担一定的风险。可见，投资即运用资金或财物直接或间接地经营某项事业，以图获得长期或短期报酬或收益。证券投资则是经过慎重分析，通过购买证券，担负一段时期的风险后，以图获得满意的收益。

既然投资是为了获得收益又必须承担风险，那么其收益我们就称为风险收益，风险收益是由动态风险产生的，静态风险只可能带来损失，因而与收益无关。动态风险既可带来损失也可以带来收益，动态风险是可以回避的，之所以人们要去冒险就是为了获得收益，如果回避风险，显然就得失去获得收益的机会，这种收益我们又称为“预期收益”，这是无法确切地计算出来，所以预期收益与实际的收益相背离时，就出现风险损失。投资者愿意承担的风险程度与预期收益大小有密切关系，一般情况下，预期收益越高，投资者愿意承担的风险越大。因此高额的风险收益常常诱使人们去投资。风险收益由于不确定性而出现负收益的时候往往使投资者蒙受较大的损失，而且正是这种不确定性，使这种风险不能利用保险的手段转嫁风险。在证券投资中，风险收益很重要，投资者希望获得较大的收益，而又不愿去冒太大的风险，这就会使某些投资者去选择购买较安全的债券，而另一些敢于冒险者投资于股票。

由于预期收益没有考虑投入的资本量的大小，所以正确评价预期收益，应以相对指标—预期收益率为衡量投资成果的指标。预期收益率又叫投资报酬率，其计算式为：

$$\text{预期收益率}I=\frac{\text{预期收益额}}{\text{投入资本额}}$$

因为投入的资本额是已知的，但其未来的收益却是未知的，所以预期收益率也是未知的。对未来收益率的预期是根据以往数年内收益率的变动来测算的。为了定量描述预期收益率，我们以数学上的均值（或期望值）来定义预期收益率。假设某证券的预期收益率I的随机分布为：

$P\{I=I_t\}=P_t\quad(t=1,2,\cdots)$；　I的数学期望值为：　$E(I)=\sum\limits_{t=1}^{\infty}P_tI_t=\mu$

式中I有无穷多种可能的值，其中包含着已发生的以前各年的收益率和未发生的以后各年的收益率，P_t是第t年收益率I_t发生的概率。我们将以前和今后各年的证券收益率视为总体，则

预期收益率指标I的数学期望值（或均值）E（I）作为未来预期收益率的无偏估计值。

例如，某种股票以往N年内收益率I分别为i_1，$i_2 \cdots\cdots i_N$，其中出现收益率为I_1，I_2，……I_n的年数分别为μ_1，μ_2，……μ_n（显然$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n=N$），N年内的总收益率之和为：$\sum_{t=1}^{n} I_t \cdot \mu_t$，N年内收益率的算术平均值为：$\left(\sum_{t=1}^{n} I_t \cdot \mu_t\right) / N = \sum_{t=1}^{n} I_t \cdot (\mu_t / N)$ 其中μ_t / N为出现收益率$I=I_t$的频率。如果时间较长的老股票即年数很大时，随机变量（收益率）I的观察值的算术平均值$\sum_{t=1}^{n} I_t (\mu_t / N)$接近于$\sum_{t=1}^{\infty} I_t \cdot P_t$，所以在N很大时，收益率I的数学期望值$E(I)=\sum_{t=1}^{\infty} I_t \cdot p_t=\sum_{t=1}^{n} I_t \cdot p_t$。根据这种设想，在数学上，我们由以往各年的收益率抽取容量为n的样本，计算出平均数作为总体平均数E(I)的无偏点估计值，即$\bar{I}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} I_t$。期望值$E(\bar{I})=E(I)=\mu$，所以预期收益率$I=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} I_t$。

二、证券投资的风险

证券投资风险通常分为两大类：（1）系统性风险；（2）非系统性风险。前者是由宏观整体的经济趋势所引起的投资预期收益的升高或降低，这种变动存在于所有证券之中，这种风险无法通过分散投资而减小或消除；后者又称为市场相关风险，它不是整体经济发展的结果，而是由某种证券所特有的影响因素，如证券发行者的产品更新和产品结构调整，经营管理不善、新技术的采用及由此带来的生产成本的下降等因素引致的该证券投资收益的变化，这种风险是局部的，波及证券的种类较少，它可以通过分散投资而减少或消除。

现在运用较多的计算投资风险的方法主要是标准差（δ）法或方差（δ^2）法与β法。

（一）标准差法和方差法

证券收益率是随机变动的，我们要研究随机变量I的总体，通过容量为n的随机样本计算出样本平均值$\bar{I}$和方差δ^2，用以推算总体的平均数I和方差σ^2。后面的计算均为样本方差作为总体方差的无偏点估计，即$\delta=\hat{\sigma}$（或$\delta^2=\hat{\sigma}^2$）。

1．投资者仅投资于单一证券的风险

总体标准差 $\sigma_R=\sqrt{E[I-E(I)]^2}$

而证券投资风险指数R（或表示式δ_R）是用样本标准差来描述的。

$$R=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(I_t-\bar{I})^2}$$

该指数是反映证券收益率的一维离散程度的，即收益率偏离其期望值的偏离程度。离散程度越大，则风险越大。样本方差为R^2。式中n——时期（年）数，t——时点（年），I_t——t年时预期收益率，$\bar{I}$——预期收益率平均数。

2．投资者投资于多种证券的风险

投资组合证券风险，是有一定相关的不同证券之间的两两组合，其收益率的二维离散程

度由协方差表示，故风险指数是：

$$\delta_{RC}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}COV(I_i,\ I_j)\cdot g_i\cdot g_j}$$

式中i，j——不同证券，C——证券组合，g_i，$_j$——证券在组合中的权重因子；n——证券组合中证券数。式中仍以样本$\overline{I}$和δ_n^2的值计算δ_{RC}，进而估算出总体协方差σ_{RC}。

（二）β（倍他）法

投资分析专家sharpe的市场模式提出了β法则，它假定单个证券之间的收益彼此相关，且相关的途径是与所谓“市场指数”中的基本要素的一般关系；单个证券收益率与市场指数收益的关系是线性的。于是某种证券的收益率与市场指数收益率的关系可以用特征线方程表示：

$I_{i,t}=\alpha_i+\beta_i\cdot I_{m,t}+(\varepsilon_{i,t})$ 式中：$I_{i,t}$表示第i种证券在t时期的收益率；$I_{m,t}$表示股价指数的收益率；α_i表示常数；β_i表示系统风险性的回归系数；（$\alpha_i+\varepsilon_{i,t}$）表示非系统性风险。

对于过去的β_i有

$$\beta_i=\frac{COV(I_i,\ I_m)}{\delta_m^2}=\rho_{im}\cdot\frac{\delta_i}{\delta_m}=\left[\sum_{t=1}^{n}(I_{i,t}-\overline{I}_i)(I_{j,t}-\overline{I}_j)\right]\Big/\sum_{t=1}^{n}(I_{i,t}-\overline{I}_i)$$

ρ_{im}是相关系数，β_i是线性回归系数。由ρ_{im}可知特征线方程的可靠程度，ρ_{im}越接近1则回归方程越能说明问题。β_i反映了证券i与证券市场的价格指数相关水平的指标，即β可以反映整个证券市场变动对单一证券的影响力，这也就是所谓的系统风险。例如，甲股票算得的β值是0.5，则表示股价指数收益率上升1%，甲股票预期收益率仅上升0.5%，反之亦然。

由回归方程作出的特征线可以预测未来的某种证券的收益率。也可以从回归系数α_i，β_i判断证券i的系统风险与非系统风险。一般而言，如果β很高，市场指数收益率变动一个较小量将引起证券收益率的较大变化，例如市场指数收益率有较小的增加（或减小），则证券的收益率有较大的增加（或减小），在证券的收益率发生了相应的变化后，其受市场的影响力也随之减弱。这也就是证券在初期的猛涨（或猛跌）之后，其涨（或跌）势渐缓，直至最后消灭。这反映在特征线方程中，就是β值由大变小；反之，β值由小变大。所以本期的β高，则下期的β将变小，反之亦然。

β法中的市场指数收益率，是以指数当作股价均值，然后将该指数的那一时点计算各种股票收益率的均值，这样市场指数收益率是一个相对指标，在美国是以标准普尔指数500种股票来计算这一指标的。我国证券市场目前还没有指数，而且上市股票种类较少，β法的局限性较大；另外，非系统风险无法由相对指标市场指数收益求得，从而无法求出某一证券的非系统风险指数。因而实际投资中多采用标准差法来衡量投资风险。一般在较短时期内，收益率I_i与风险指数δ的关系不稳定，因此β法应用于长期投资的效果较好。我国证券市场开放时间短，上市股票发行的时间较短，所以，就这一点而言，应用β法也不合适。

三、证券投资的风险——收益率无差异曲线

证券投资者对风险大的证券要求有较高的预期收益率，而风险较小的证券要求的预期收益可以低些。因此，对某个投资者而言，风险与预期收益率之间有一定的组合关系，即“效

用”，不同风险的证券要有相应的预期收益率作补偿，都可以使投资者感到同样的满足（或者说对投资者效用相等）。我们将效用相等的各点连接起就成为一条风险——收益率无差异曲线。不同的投资者对于风险的态度不同，因而有不同的无差异曲线。（如图2所示的曲线A、B）曲线I_A上的任意两点（δ_{RA}, I_A）、（$\delta_R{}'_A, I_A{}'$）对投资者A来说是无差异的。在风险指标$\delta_R=\delta_f$时，投资者A要求预期收率I_1，而投资者B要求预期收益率为I_2，两者有同样的满足感，即（δ_f，I_1）、（δ_f，I_2）对于A、B两者效用相同（因为$U_A(0, I_o)=U_B(0, I_o)=U_A(\delta_f, I_1)=U_B(\delta_f, I_2)$）。显然同样的满足感，投资者A要求收益为$I_1$大于投资者B的要求$I_2$，投资者B更富有冒险精神。

对应于不同的无风险收益率，我们可以给每个投资者相应的一簇δ_R—I无差异曲线（如图1所示）。

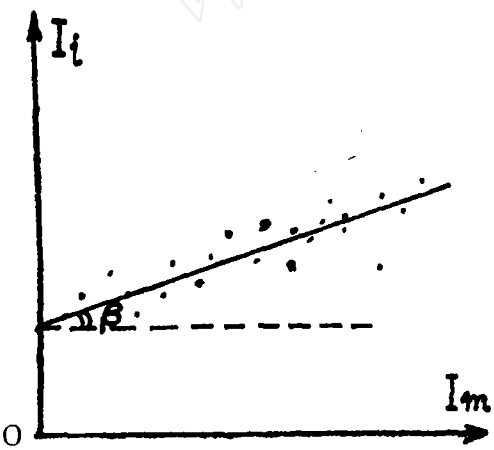

图1：回归方程示意图

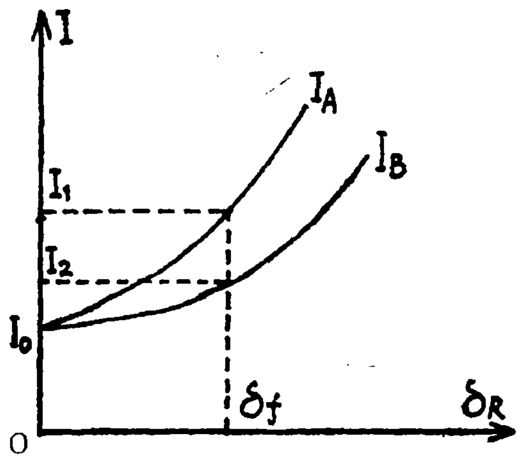

图2：δ_R—I无差异曲线

以投资者A为例，在风险指标$\delta_R=0$时，$I_3>I_2>I_1$，这时无差异曲线I_{A1}的任意点对于投资者A来说，效用不变，都等于$U(0, I_1)$；同样，曲线I_{A2}上各点的效用相等且为$U(0, I_2)$，因为$I_2>I_1$，显然$U(0, I_2)>U(0, I_1)$，即曲线I_{A2}给投资者A带来的满足较曲线I_{A1}高。因此，曲线I_{A1}、I_{A2}、I_{A3}表示投资者A的满足水平递增，效用增大。对同一投资者无差异曲线不能相交，否则自相矛盾。在预期收益率I不变时，风险δ_R越大，则对同一投资者效用下降。风险收益边际替代率$\gamma=dI/d\delta_R$，是无差异曲线的斜率。在某一特定点（δ_R，I），γ越大者越不敢冒险。

四、组合证券投资的最佳选择

（一）有效证券组合

有效组合的概念是投资决策论的基础。其基本含义是：一旦每种证券的收益率I_i和风险指数δ_{Ri}计算出来，投资者选择其中他所愿接受的收益率与风险程度的投资选择。在风险δ_R相同时，若有其它更高的预期收益率I可供投资选择，我们选择I大的；收益率I相同而有更低的风险δ_R可供投资选择，我们选择风险δ_R小的。上述标准即为有效益的投资选择。因为有效值与股票种数之间有一定关系，根据有效益的投资选择原则做以下选择：

1．包含一种股票时的投资选择。在所有股票中，我们选择预期收益率I最大的，选择风险δ_R最小的。（如图4中A点所示）

2．含二种股票的投资选择。在上述选择的股票后，第二种股票的收益率与风险均较低，而且减小投资选择风险的唯一办法就是增加另一种股票，其中两种股票的比例是可调的，但必须符合有效投资选择标准。

3．三种不同股票组成的投资选择。则其δ_R、I进一步降低。此后按同样的方法，可以有多种股票组合的有效投资选择。

由于组合证券中各证券所占的比例是可调的，因而产生许多可能组合，这些可能组合点的集合在(δ_R, I)平面形成一个区域(或曲线)。

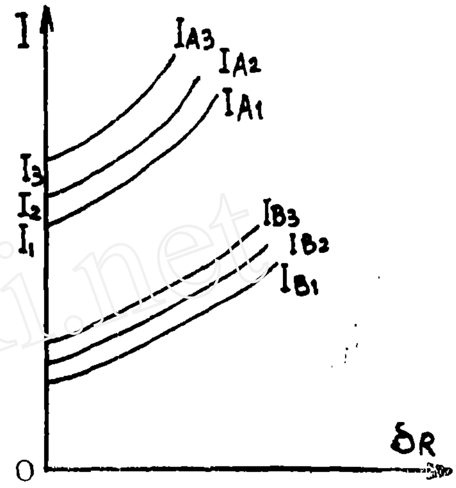

图3：无差异曲线簇

（二）有效边界的确定

在有效组合的集合区域上（见图4所示意的）根据有效投资选择原则，A点收益最大，B点风险最小，$\overset{\frown}{ACB}$上的任意点均是最优有效组合点。$\overset{\frown}{ACB}$曲线即为有效边界。在有效边界上的点是组合证券中各证券最佳比例的有效组合点。

我们以两种证券组合的投资为例，说明多种证券组合投资的结果。

设A和B两种证券相关，投资计划P中，A证券占总投资比例为α（$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$），则B证券的投资所占总投资的比例为（$1-\alpha$），$\alpha$是可以变动的参量。随着$\alpha$的不断变动，可以得到许多种不同的A、B证券组合。假定A、B证券的收益率期望值分别为I_A，I_B，则证券组合投资收益率为：

$$I_P = \alpha I_A + (1-\alpha) I_B$$

I_A、I_B的协方差是：

$$COV(I_A, I_B) = E\{[I_A - E(I_A)][I_B - E(I_B)]\}$$

相关系数$\rho_{AB} = COV(I_A, I_B) / (\delta_A \cdot \delta_B)$

这时组合方案P的收益率为：

$$E(I_P) = \alpha E(I_A) + (1-\alpha) E(I_B)$$

风险指数δ_p^2为

$$\delta_p^2 = E\{[I_P - E(I_P)]^2\} = \alpha^2 \delta_A{}^2 + (1-\alpha)^2 \delta_B{}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{AB} \cdot \delta_A \delta_B$$

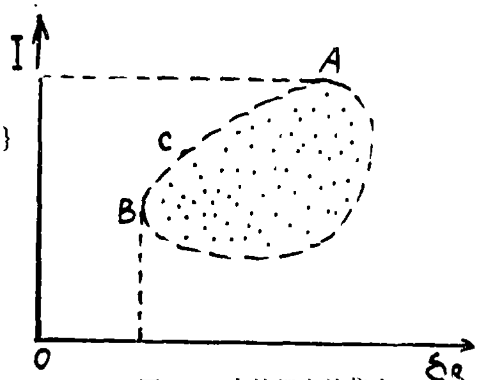

图4：　有效组合的集合

评价证券组合方案的问题是如何选择参量α使证券组合最优。

如果以预期收益率的期望值最大为选择标准，那么选择对应于期望值大的方案就可以了；如果以证券组合风险最小作为选择标准，则是求二次函数的极值问题，求证券组合的风险指数（收益率方差）对α的微分，得到方程如下：

$$\frac{d\delta_p^2}{d\alpha} = 2\alpha\delta_A{}^2 - 2(1-\alpha)\delta_B{}^2 + 2(1-2\alpha)\rho_{AB} \cdot \delta_A \cdot \delta_B = 0$$

这样选取的α对应的证券组合是按风险最小的最优方案。对同一α值，相关系数越小，风险指数（方差）越小。

当$\rho_{AB}=-1$时，$\alpha=\delta_B/(\delta_A+\delta_B)$　且$\delta_P=0$。

我们分别讨论相关系数ρ_{AB}为－1、0、＋1的情形。相应于这些ρ_{AB}的值，用极值法求得使风险（方差）最小的组合。（如图5所示）当固定ρ_{AB}时，变化参量α的值，在坐标I—δ_R上形成一条抛物线，$\rho_{AB}=1$或－1时，抛物线蜕化为直线和折线。所以A、B证券各种可能的组合点（δ_R，I）都落在三角形内，α值从1变到0。对本例中每个固定的P_{AB}，都有一个α_P，当$\alpha\in[0,\alpha_P]$时，证券组合是有效的；当$\alpha\in[\alpha_P,1]$时，组合是无效的。α_P对应的风险指数最小，从图5中的曲线$\overset{\frown}{AB}$可以看出，在区间$\alpha_P<\alpha\leqslant 1$上的α点与$\alpha_P$点对应的收益率且风险指数增大，这种组合显然无效，故不予考虑。

下面我们看看三种股票的组合情况，设三种股票A、B、C的组合，A、B、C三点分别表示股票A、B、C为100%时的收益率与风险状况，曲线$\overset{\frown}{AB}$中的各点，是表示A、B股票的各种比例组成的组合股票，虚线$\overset{\frown}{AC}$则表示A股票和C股票的各种比例组成的股票组合，同样$\overset{\frown}{BC}$表示股票B、C的各种比例组成的股票组合。在分析证券组合时，一般情况下股票间的相关系数ρ小于1。如图6所示，G点表示某种比例的A股票与B股票的组合，所以$\overset{\frown}{GC}$上各点是A、B股票组合再与C股票按某种比例的组合。由图6可以看出，$\overset{\frown}{GC}$某些线段的风险比原来的几根曲线都小，即产生了有效组合；同时必须知道，二种股票的组合只是I—δ_P图上的一根曲线（当完全相关时为直线），而三种股票的组合，是I—δ_P图上的一个平面区域。这是因为与$\overset{\frown}{GC}$类似的曲线可以有许多根，其形状如图7，所有两两组合的有效曲线形成的平面边界$\overset{\frown}{ALC}$线，曲线点L为最小风险组合，$\overset{\frown}{AL}$上的点显是无效边界线，这样就可以定出有效边界线$\overset{\frown}{LC}$，有效边界上的任意点均为有效组合。这种定有限边界的思想是取各种有效组合的最优值。更多种股票的组合的有效边界也依此法类推而得。这种定有效边界的计算很繁琐，必须借助计算机来完成。

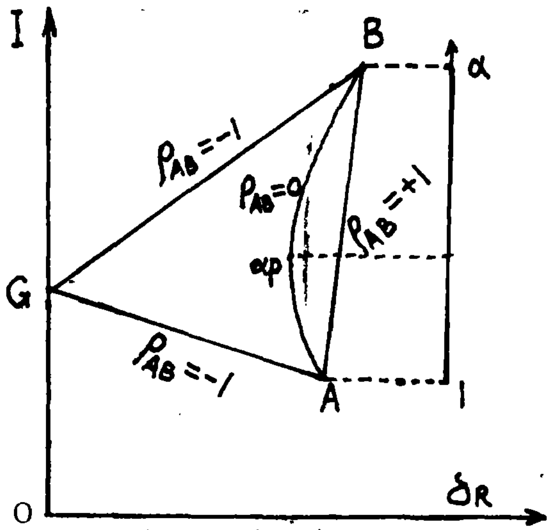

图5：二种证券组合的图形

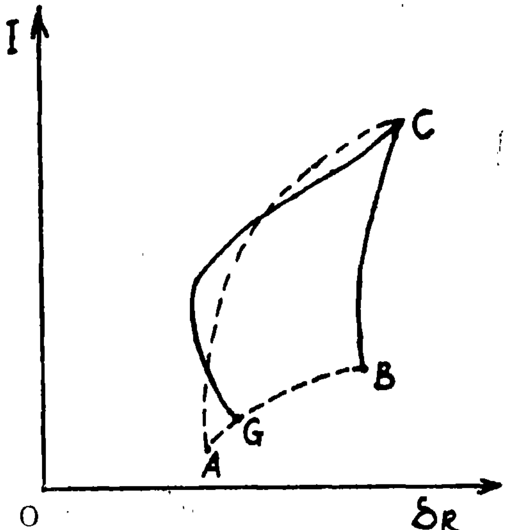

图6：三种证券组合的图形

（三）最优证券组合

对某一投资者而言，其风险——收益率无差异曲线和有效边界的切点即为组合证券投资最优点（如图8所示的T_H和T_L点）。图中I_H是相对于I_L无差异曲线投资者更富有冒险性者。

投资收益率与风险指数的定量研究，对投资者如何利用证券组合分散风险有指导意义，特别是那些以获得预期收益为出发点的长期投资者更重要，其最大缺陷是仍带有浓厚的主观色彩，如风险——收益率无差异曲线是因不同的投资者而异的，这增加了实际运用的难度。

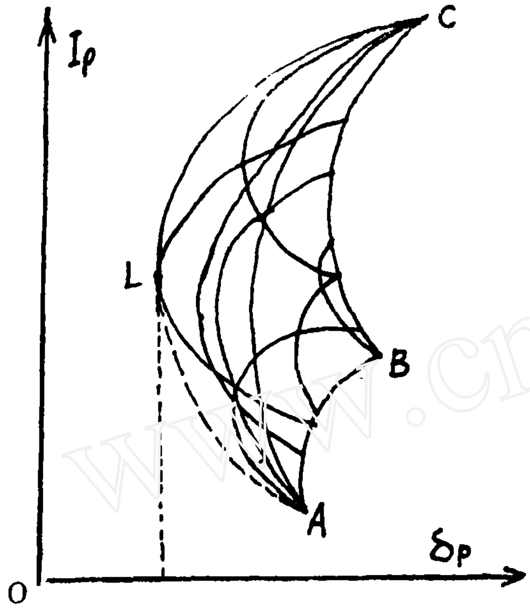

图7

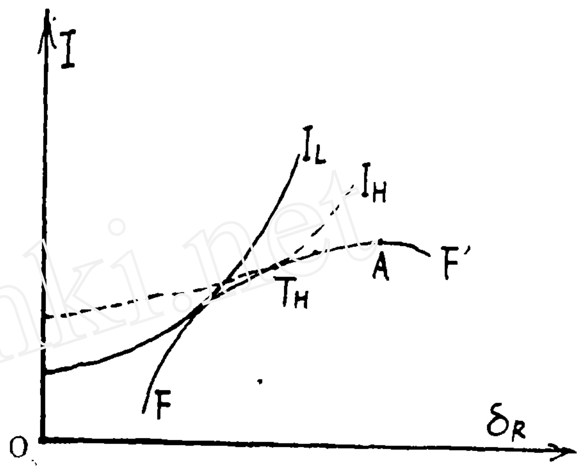

图8

（责任编辑　沈晓冰）

（上接第18页）

一个半世纪的历史证明了，重农学派倡言改革，其目的仅在于巩固自身所依附的封建王朝，在一个强大的封建专制统治下，劳动者必然被套上更沉重的枷锁；无产阶级和法国广大小生产者也不可能从西斯蒙第的空想说教和娓娓动听的罗曼蒂克的描绘中能寻找到解除自身苦难的正确答案。

1789年资产阶级大革命中所制定的“人和公民权利的宣言”中，提出“自由、平等、博爱”的口号。但当资产阶级一旦巩固了政权，就立刻对昨日反封建的同盟者—无产阶级和劳动群众进行镇压。西斯蒙第亲眼看见法国革命的悲惨结局，他承认“他的伟大的同胞和革命前法国的优秀人物所怀抱的那些希望实际上实现的太少了”。⑪

事实证明，无产阶级、劳苦大众如果把自己的幸福和自由的希望寄托于资产阶级革命胜利并掌握后的恩赐，从而把资产阶级认为是可靠的同盟者，那就不啻与虎谋皮。1830年巴黎工人、士兵和学生发动的“七月革命”和1834年里昂工人起义虽然失败，却显示了无产阶级的先锋作用，标志着无产阶级开始走上自己解放自己的道路。巴师夏用编织谎言去扭转工人阶级的斗争方向，结果只能是白费心机。1848年《共产党宣言》发表了。它号召“每一个国家的无产阶级当然首先应该打倒本国的资产阶级”。它指出“资产阶级的灭亡和无产阶级的胜利是同样不可避免的”。真理的光芒照亮了世界也包括法国革命斗争的道路。法国无产阶级、劳动人民，拨开迷雾、摆脱羁縻，终于把反抗斗争推向了一个新的历史阶段。

注释：

①④《资本论》人民出版社1964年版，第一卷，第123页。第二卷，第387页。

②③《魁奈经济著作选读》商务印书馆1979年版，第349页。③同②。

⑤王亚南主编《资产阶级古典政治经济学》选转。第705页。

⑥《列宁全集》人民出版社1959年版，第二卷，第207页。

⑦⑩《马克思恩格斯全集》人民出版社72年版，第17页，第98页。

⑧⑨季陶达编。《资产阶级庸俗政治经济学选辑》，商务印书馆63年版。第94页，第220页。

⑪卢森贝《政治经济学史》第一卷，第105页。

（责任编辑　曾德国）