贫困评价与贫困指数

王祖祥

贫困问题至今仍是一个世界性的问题,世界范围内的贫富两极分化仍有扩大的趋势,第三世界国家内部长期存在着普遍的贫困,发达资本主义国家内部也存在严重的贫困现象,因此贫困问题一直是困扰各国政府的问题,如何减轻贫困一直是经济学的重要课题之一。

我国人民通过 50 年艰苦卓绝的努力,使"一穷二白"的面貌发生了重大变化,已经将我国建设成了繁荣昌盛的国家,我国大部分人民已经摆脱了贫困,正在进入小康。在如此短暂的时期内取得如此辉煌的成就,我们完全有理由感到骄傲与自豪。但此时仔细了解一下有关贫困问题的理论或许是有益的,因为我国还存在相当数量的贫困人口,这些人口至今基本的温饱还没有解决,显然使这部分人口脱贫是当务之急,不过要注意的是已脱贫的贫困人口还可能重新陷入贫困。另一方面,对过去计划经济体制遗留下来的结构性矛盾与问题必须进行改革与调整,否则,我国的经济不可能有快速的发展,改革开放 20 年来的经济高速发展充分说明了这一点。但对经济进行调整,必将产生更多的下岗人员,低收入群体有扩大的趋势。大量城市下岗人员生活困难,形成新的贫困群体。因此,对付贫困问题将是一个相当长期的任务。同时,随着经济的发展,经济实力的日益雄厚,分配问题也日益突出,必须建立庞大的社会保障体系,以保障失业人员、下岗职工、退休人员、城镇居民生活困难家庭的基本生活,实际上,这一保障体系正在建立之中。可以预料,在我国社会保障体系的建立与完善过程中,必将有大量的政策性问题需要研究,必将需要随时对贫困状况进行监控与评估。另外,由于经济的发展和社会的进步,贫困的概念本身也将随之调整。因为贫困应该是一种相对的概念,任何时候收入分配不可能是完全平等的,总存在低收入群体,政府的收入政策必须对这部分人给予更多关注。因此,了解贫困评价的理论与方法是完全必要的,借助于这种理论,我们可以对经济系统进行评价,了解贫困的动态变化,从而为经济政策的制订提供依据。相应的评价方法也可以供其他经济评估中借鉴。考虑到国内经济贫困理论中贫困指数方面的研究还很少见到这一事实,本文拟对国外相对成熟的贫困指数及其构造方法进行一些介绍与探索。笔者认为,借鉴这些比较成熟的理论,对我国的贫困问题研究一定是大有裨益的。

关于贫困问题研究的国外文献是比较丰富的,我们选择讨论内容时主要是出于应用上的考虑。为使内容通俗易懂,尽量避免了抽象的数学推导。

贫困评价与收入不平等评价的方法实际上是类似的,采用的方法不外乎 3 种,一是统计法,例如收入不平等评价的基尼系数就是按这种方法构造的;二是福利方法,即在导出收入不平等指数或贫困指数时,将经济福利考虑进去;第三种方法是所谓公理化方法,即先给出相应指数经济上应满足的条件,再寻找满足这些条件的指数。在以下某些贫困指数的推导中,实际上将后两种方法综合起来了。

一、贫困线

贫困评价理论中,必须确定一个所谓的贫困线。贫困线的概念很多人并不陌生,它是一收入数量,若经济成员的收入小于此数,则算是贫困成员,收入大于或等于此数的成员是非贫困成员。本文中所谓收入都是指货币收入。实际上有两种贫困线的概念,一是绝对的贫困线,贫困线以下的是贫困人口,于是提高这些成员的收入水平取终将能消除贫困。另一种是相对的贫困线,随着全社会生活水平的提高,贫困线也相应提高,因此任何时候都会存在一定数量的贫困人口。

贫困线的定位是一个困难的问题, 究竟收入多少时算是贫困, 人们的意见往往难以统一; 另外, 如果 200 元是贫困线, 那么收入为 200.01 元就不能算是贫困了, 显然这种划分不能算是科学的; 而且, 由于各人的身材、体重、性别、种族、居住地区等不同, 同样的收入, 对应的福利状况可能相差很远。但是有关的贫困评价理论大多还必须依赖于贫困线的存在, 在此我们也不例外。实际中, 政府不得不根据贫困线对贫困人口进行救助, 由于信息不对称, 政府一般难以了解救助对象的确切收入, 因此, 给出贫困线的做法也有实际的应用背景。

下面我们来看一下贫困线定位的一些做法。英国的做法是先确定保证健康的最低收入, 再将这一最低收入乘以 120% 或 140% 后做为贫困线(阿兰德(Sudhir Anand)。[①]美国的做法与此类似, 是用农业部测定的保证最低需要食品的价值量乘以 3 来做为贫困线。

80 年代初, 阿兰德(1983) 在对马来西亚 70 年代的贫困状况进行研究时, 部分采用了马来西亚政府的做法, 以下是这一做法的粗略介绍。此法将每个人的消费支出分成两部分: 食物消费与非食物消费。根据卫生部门的研究, 确定关于成年人及儿童日常生活中基本的营养需要, 再确定能满足这种基本需要的若干种食物及数量, 将这些食物数量乘以当前的市场价格, 即得各类人保证最低营养的收入数量。这一数量作为贫困人口的食物消费贫困线。非食物消费含衣被鞋袜、住房及能源、家庭设备及运转费用、交通与通讯等。一种估计这类最低费用的方法是计算某标准收入家庭(例如 1973 年的 200 马来西亚元(M＄200) 收入的家庭) 中每人之上述各类非食物消费占食物消费的比例, 以此比例乘以食物消费贫困线, 将所得数量作为贫困人口非食物消费贫困线。另一种方法是直接计算该标准家庭平均每人上述 4 类非食物消费的收入数量, 并将其作为贫困人口非食物消费贫困线。将两类贫困线相加, 算得的贫困线大约为每人每月 M＄28～M＄33, 其中非食物消费约占 1/4, 当然具体执行时还可以调整。[②]

确定贫困线的方法很多, 实际上, 我国政府的城市居民最低生活保障线也是一种贫困线。

二、收入不平等评价的基尼(Gini) 系数

由于将要介绍的某些贫困指数与基尼系数有关, 下面先对它进行简短介绍。国外学者对经济不平等评价问题进行了大量研究, 存在许多描述收入不平等状态的指数, 这种指数是一实数, 它越大表示收入分配越不平等。通过这种指数, 人们可以进行国与国之间收入不平等状况的横向比较, 也可以进行一国内各个时期之间收入不平等状况的纵向比较。著名的收入不平等指数是基尼系数, 它是一统计指数, 是在对全社会的收入状况进行统计的基础上建立的。

基尼系数与洛伦兹(Lorenz) 曲线有非常紧密的联系。设 n 是经济成员的总数。对 n 个经济成员的任何收入分配向量 $y \in R^n_+$ (分量非负的所有 n 维向量全体), 我们都将其分量重排形成新的向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, 使得满足条件 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, 再对 x 进行评价。于是我们以下只需考虑按数量的递增顺序排列的收入向量。记为:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j,\ c_i = \frac{1}{n\bar{x}}\sum_{j=1}^{i} x_j,\ p_i = \frac{i}{n}$$

即 p_i 是位于低收入端的 i 个经济成员占整个经济成员的份额, c_i 是这 i 个经济成员的收入占整个收入的份额。洛伦兹曲线是连接以下各点

$$(0, 0), (p_1, c_1), \cdots, (p_{n-1}, c_{n-1}), (1, 1)$$

的折线。因此洛伦兹曲线 $L(x, p)$ 是具有以下性质的函数: 满足 $L(x, 0) = 0$, 又对 $i = 1, \cdots, n$ 有:

$$L(x, p_i) = (n\bar{x})^{-1}\textstyle\sum_{j=1}^{i} x_j$$

特别当 x 的各分量相等时, 对任何 $p \in [0, 1]$ 成立 $L(x, p) = p$, 即均等收入曲线。基尼系数定义为 45 线与洛伦兹曲线之间区域 D 的面积的 2 倍。如图 1 所示。

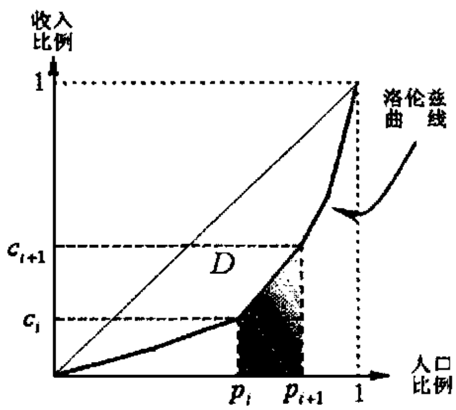

图 1　基尼系数 = 2D

记 $p_0 = c_0 = 0$。由于图中阴影部分面积为:

$$c_i(p_{i+1} - p_i) + \frac{1}{2}(c_{i+1} - c_i)(p_{i+1} - p_i)$$

$$= \frac{1}{2}(c_{i+1} + c_i)(p_{i+1} - p_i)$$

从而图中正方形中洛伦兹曲线以下的面积为:

$$\frac{1}{2}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} + c_i)(p_{i+1} - p_i)$$

则得出与 x 对应的基尼系数:

$$G(x) = 1 - 2\int_0^1 (x, p)\,dp = 1 - \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} + c_i)(p_{i+1} - p_i)$$

基尼系数的另外两种等价表示法为:

$$G(x) = \frac{1}{2n^2\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right| \qquad (1)$$

$$G(x) = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n^2\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}(n - i + 1)x_i \qquad (2)$$

显然, $G(x)$ 越大, 收入分配越不平等。注意到位于均等收入线以下且面积等于 $2D$ 的洛伦兹曲线有无穷多条, 用 $G(x)$ 来对收入不平等进行评价时, 这些曲线对应的收入不平等状态相同, 这当然不一定合理。因此, 一般来说用 $G(x)$ 不能确切回答任何两种分配状态 x^1 与 x^2 中哪种更平等, 除非对任何 $p \in [0,1]$ 成立 $L(x^1,p) \geq L(x^2,p)$, 此时将有 $G(x^1) \leq G(x^2)$, 即 x^2 对应的分配更不平等。由此可见, 用基尼系数只能部分解决贫困状态的比较问题, 当不是对任何 $p \in [0,1]$ 成立 $L(x^1,p) \geq L(x^2,p)$ 时, 需要寻找另外的解决办法。关于收入不平等的评价指数有大量的经济学文献供参考, 福斯特 (J. E. Foster) 对这一问题进行了深入浅出的介绍。③

三、森(Sen)贫困指数

设 $z > 0$ 是贫困线, 对满足 $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ 的收入分配向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, 记 $q = q(x,z) < n$ 是贫困成员的数量, 即 $q = \max\{i \mid x_i < z\}$。称 $z - x_i$ 为收入差, 它是第 i 个成员的收入游离贫困线的距离。我们希望找到能描述全社会贫困程度的指标 $p(x,z)$, 称为贫困指数, $p(x,z)$ 与贫困有这样的对应关系: 它越大, 社会的贫困程度越严重。

考虑贫困指数时, 一般都假定贫困线以上成员的总收入在该组成员中的配置 $(x_{q+1}, \cdots, x_n)$ 与贫困没有关系。

最简单的贫困指数是所谓贫困率(或人头率), 它适用于对贫困程度进行粗略的估计:

$$h = q/n$$

记 $\overline{x_q}$ 是贫困成员的平均收入, 即 $\overline{x_q} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} x_i$, 下面的贫困指数称为贫困差率, 计算也不复杂:

$$r = \frac{1}{qz}\sum_{i=1}^{q}(z - x_i) = \frac{z - \overline{x_q}}{z} \tag{3}$$

要注意的是, 对从贫困成员处将收入向其他贫困成员的转移, 这两个指数反应都不敏感, 除非接受转移的成员摆脱了贫困, 所以它们作为贫困指数时容易受到非难。

直到 1970 年中期, 经济理论中用于贫困评价的指数还很少, 森(A · K · Sen) 1976 年的文章打破了沉寂, 他采用公理化的方法, 给出了一种著名的贫困指数④, 尽管后来发现这一指数有缺陷, 但正是在这一开拓性工作的基础上, 稍后许多学者对贫困指数问题进行了深入研究, 得出了一系列有价值的贫困指数, 有关参考文献例如可参阅克拉克(Clark)等⑤、福斯特(J · Foster)等⑥、昆杜(A · Kundu)等⑦、布莱克阿比(C · Blackorby)等⑧、卡克瓦里(N · Kakwani)⑨等人的文章。所谓公理化方法, 是指先按经济意义, 确定贫困指数应该满足的条件, 再寻找满足这些条件的贫困指数。可以通过一个例子来说明这样做的理由: 如果我们希望把若干个人排成一横排, 常人都会认为从高到低或从低到高排列是合理的, 这符合大多数人的习惯。但如果按先胖后瘦来排, 或先老后幼来排, 可能让人看不出什么规律, 队形也可能是很奇怪的。上述"从高到低"或"先胖后瘦"即是排队的规则, 只有有了这种大多数人觉得"合理"的规则, 我们才能排出一个队形来。对贫困状态进行评价, 实际上是对各种贫困状态进行排队, 也必须先确定排队的比较理想的规则, 这种所谓的"理想"是用下面的公理来表述的, 它对评价指数加上一些具有明确经济意义的条件。以下记 e^i 是 n 阶单位阵的第 i 列。森对贫困指数 $p(x,z)$ 的要求是:

1. 单调公理: 设 $\epsilon > 0$, 对任何 $i \leq q$, 若 $x_i - \epsilon \geq 0$, 则成立 $p(x,z) < p(x - \epsilon e^i, z)$;

满足这一条件的贫困指数度量贫困程度时, 具有以下性质: 在现有收入分配的基础上, 减少任何一个贫困成员的收入时, 整个社会的贫困程度将更严重。

2. 转移公理: 设 $i \leq q, \epsilon > 0$ 且 $x_i - \epsilon \geq 0$, 对任何 $j > i$, 成立:

$$p(x,z) < p(x - \epsilon e^i + \epsilon e^j, z)$$

满足这一条件的贫困指数度量贫困程度时, 具有以下性质: 在现有收入分配的基础上, 把收入从任何一个贫困成员转移到另一较为富有的成员时, 将增加整个社会的贫困程度。

注意到, 贫困率不满足这两个条件, 因为减少任何贫困成员的收入, 或将收入从一个贫困成员转移给另一贫困成员且后者仍不能脱贫时, 这一指数不改变。注意到, 对这种转移, (3) 中贫困指数也是不敏感的。

除满足以上两个条件外, 森还要求贫困指数满足一个规范化条件: 当所有贫困成员的收入等于 $\overline{x_q}$ 时, 贫困指数能够等于 hr。

对满足 $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ 的收入分配向量 x, 容易验证量:

$$S(x,z) = C\sum_{i=1}^{q}(q + 1 - i)(z - x_i) \tag{4}$$

满足单调公理与转移公理(请读者验证)。这里 $C > 0$ 是待定常数。上式反映了一种所谓相对剥夺的概念, 贫困成员的收入相对其他贫困成员游离贫困线越远, 被剥夺得相对来说更厉害。上式的经济意义是, 对被剥夺得相对厉害者, 给予更大的权数。由于规范化条件有:

$$C\sum_{i=1}^{q}(q + 1 - i)(z - \overline{x_q}) = \frac{1}{2}Cq(q + 1)(z - \overline{x_q}) = hr$$

由此式即可确定 C。又由(2)式知 q 个贫困成员的组内收入不平等基尼系数为:

$$G_q = \frac{q + 1}{q} - \frac{2}{q^2\overline{x_q}}\sum_{i=1}^{q}(q + 1 - i)x_i$$

利用此式最后可导得贫困指数:

$$p(x,z) = \frac{q}{nz}\left(z - \overline{x_q} + \frac{q}{q + 1}\overline{x_q}G_q\right)$$

特别当 q 很大时(实际中一般如此), $q/(q + 1)$ 近似于 1, 即得森贫困指数:

$$S(x,z) = \frac{q}{nz}\left(z + (G_q - 1)\overline{x_q}\right)$$

又由于 $\bar{x}_q/z = 1-r$，所以得:

$$S(x,z) = hr[1+(1-r)G_q/r]$$

可见 $S(x,z)$ 是贫困率与 G_q 的增函数，当贫困成员越多或贫困成员之间收入差距越大时，整个社会的贫困程度越严重。由(4)式可以发现森指数的另一缺点，无论是最贫困的成员还是贫困程度较不严重的成员，将等量收入从他那里转移给第 $i+1$ 个成员时(接受转移者仍不能脱贫)，该指数的增量相等，但直观上前一种转移对贫困程度的影响要大。

四、C-H-U 贫困指数

实际上，森指数可以写成

$$S(x,z) = hr[1+G(g)] \tag{5}$$

这里 $g=(g_1,\cdots,g_q)$，$g_i = z-x_i$。$G(g)$ 是描述贫困差在贫困成员间分配不平等程度的基尼系数。为验证上式，注意由(1)知 q 个成员的组内基尼收入不平等系数为:

$$G_q = \frac{1}{2q^2\bar{x}_q}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}|x_i - x_j|$$

若记 $\bar{g} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} g_i = zr$，则有 $(1-r)/r = \bar{x}_q/\bar{g}$，$|x_i - x_j| = |g_i - g_j|$，即得:

$$\frac{(1-r)G_q}{r} = \frac{1}{2q^2\bar{g}}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}|g_i - g_j| = G(g)。$$

(5)式可以稍做推广，既然 $G(g)$ 是 g 在贫困成员之间分配的不平等指数，为什么不能换为其他 g 分配的不平等指数呢? 考虑以下社会福利函数:

$$W(g) = -\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{q}g_i^{\alpha}$$

其中 $\alpha \ge 1$，这样取 α 使得 $W(g) = W(g(x))$ 是关于收入分配 x 的凹函数，其经济意义是更均匀的收入分配导致更大的社会福利。较大的 α 导致凹得更厉害的等福利曲线，从而更偏好平等分配，即 α 可以理解为对不平等分配的厌恶程度指数。可以证明当 $\alpha\to+\infty$ 时，$W(g)$ 序数上等价于 $-\min_{1\le i\le q} g_i = \max_{1\le i\le q}(-g_i)$，此时社会福利评价以收入最低者的意志为转移，即对不平等的厌恶达到一种极端的程度。实际上，$W(g)$ 度量了由于贫困成员之间收入差分配不合理导致的福利损失，由于 $\alpha\ge 1$，因此在度量这种损失时，让收入相对更低的成员有更大发言权。

求满足 $W(\tilde{g}e) = W(g)$ 的所谓平等收入差等价量 $\tilde{g}$，其中 e 是分量全为 1 的 q 维向量，即得:

$$\tilde{g} = \left(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{q}g_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

注意到 $\tilde{g}$ 是满足 $-W(\tilde{g}e) = -W(g)$ 且值最大的点，且由 $\alpha\ge 1$ 知 $\tilde{g}\ge\bar{g}$。按导出阿特金森(Atkinson)收入不平等指数的思想，$(\tilde{g}-\bar{g})/\bar{g}$ 是收入差分配的不平等指数。(5)式中用 $\tilde{g}/\bar{g}-1$ 代替 $G(g)$ 即得克拉克(Clark)等人的第一种 C-H-U 贫困指数:

$$C_1(x,z) = \frac{\tilde{g}}{\bar{g}}hr = \frac{q\tilde{g}}{nz} = h\left(\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{z-x_i}{z}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \tag{6}$$

$C_1(x,z)$ 满足单调公理，且当 $\alpha>1$ 时可以证明 $C_1(x,z)$ 满足转移公理。

可见当所有贫困成员的收入相等时，$C_1(x,z)$ 的值与 α 无关，这是这一指数的缺点，仍采用福利方法，Clark 等人导出了可以克服这一缺点的另一贫困指数。取 $\beta\le 1$，令

$$\tilde{x}_q = \left(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{q}x_i^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

且记 $A = 1-\tilde{x}_q/\bar{x}_q$，它是 q 个贫困成员的阿特金森收入不平等指数，下面是第二种 C-H-U 贫困指数:

$$C_2(x,z) = 1-[h(1-A)^{\beta}-h+1]^{1/\beta}$$

$C_2(x,z)$ 度量了由于贫困成员收入数量小于 z 所导致的总福利损失的比例。

显然 $C_2(x,z)$ 满足单调公理，是 β 的减函数，即 β 越小时，相同收入分配情况下的贫困指数数值更大，即把贫困程度看得更严重。实际上 β 是对收入不平等的厌恶程度指数。有意义的是，与(5)中贫困指数一样，$C_2(x,z)$ 与某个贫困成员的组内收入不平等指数有关。

五、F-G-T 贫困指数

记 e^i 是第 i 个单位向量，可见要求贫困指数 $p(x,z)$ 除满足单调公理与转移公理外，另满足以下条件是合理的:

3. 转移敏感性公理: 设 $i\le q, j\le q$ 且，对任何 $\epsilon>0$ 且 $x_i-\epsilon\ge 0$，$x_j = x_i+d<z$，$d>0$，则:

$$p(x-\epsilon e^i+\epsilon e^j, z)-p(x,z)$$

是 x_i 的减函数。

满足这一条件的贫困指数度量贫困程度时，具有以下性质: 贫困成员的收入水平越高，从他们那里进行相同水平的收入转移时，对全社会贫困程度的影响越小。直观上容易看出，例如在农民还很贫困时，哪怕是数量不大的乱收费，也会严重恶化他们的贫困程度。反之，让贫困人口休养生息，当他们变得相对富裕了时，有点乱收费(尽管乱收费之风断不可长)也不会使他们的贫困程度严重恶化。因此，要求贫困指数满足这一条件是有道理的。

4. 子集单调性公理: 对收入水平从小到大顺序排列的收入向量 x，将其分成 m 组，即令 $x=(x^1,\cdots,x^m)$，x^i 是分量个数为 n_i 的子向量。将 x 中的子向量 x^j 调整成 $\tilde{x}^j$ 形成新的收入向量 $\tilde{x}$，如果 $\tilde{x}^j$ 的组内贫困指数高于 x^j，则 $\tilde{x}$ 的贫困指数高于 x。

满足这一条件的贫困指数对任何部分成员的贫困程度的改变是敏感的，即能够反映这样的事实: 如果部分成员的贫困程度加重，则整个社会的贫困程度亦加重，任何部分成员的贫困程度减轻，则整个社会的贫困程度也随之减轻。

福斯特(Foster)等人建议使用以下公式来作为贫困指数(F

- G- T 贫困指数):

$$p_\alpha(x,z)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{z-x_i}{z}\right)^\alpha \tag{7}$$

并证明了以下定理:

定理　对任何 $\alpha>0$, $p(x,z)$ 满足公理 1 与公理 4。对任何 $\alpha>1$, $p_\alpha(x,z)$ 满足公理 1、2、4。对任何 $\alpha>2$, $p_\alpha(x,z)$ 满足公理 1～4。

由于此结论证明简单, 我们给出如下。实际上对任何 $\alpha>0$, 按公理 4 所述对 x 分组, 可见 $p_\alpha(x,z)$ 可以写成:

$$p_\alpha(x,z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{n_j}{n}p_\alpha(x^j,z) \tag{8}$$

因此公理 4 成立。又由于对任何 $\alpha>0$, 公理 1 显然成立, 因此第一个结论成立。

显然, 对任何 $\alpha>0$, 将贫困成员的收入转移给非贫困成员将增加贫困指数。

对任何 $\alpha>1$, 如果 $x_i<x_j<z$, 考虑从 i 到 j 进行收入转移 $\epsilon>0$, 如果 $x_j+\epsilon<z$, 由于

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\left(\frac{z-x_i+\epsilon}{z}\right)^\alpha+\left(\frac{z-x_j-\epsilon}{z}\right)^\alpha\right)\geq 0$$

因此, $p_\alpha(x,z)$ 必然增加。

如果 $x_j+\epsilon>z$, 且 $x_j<z$, 即转移使 j 脱贫了, 则贫困指数增量为:

$$\begin{aligned}\Delta p_\alpha&=p_\alpha(x-\epsilon e^i+\epsilon e^j,z)-p_\alpha(x,z)\\&=z^{-\alpha}n^{-1}\left[(z-x_i+\epsilon)^\alpha-(z-x_i)^\alpha-(z-x_j)^\alpha\right]\end{aligned}$$

由于 $z-x_j-\epsilon<0$, 并注意到对任何 $a\geq 0,b\geq 0,\alpha>1$ 有:

$$(a+b)^\alpha-(a^\alpha+b^\alpha)=\alpha\left(\int(a+y)^{\alpha-1}dy-\int y^{\alpha-1}\right)\geq 0$$

即知有:

$$\Delta p_\alpha\geq z^{-\alpha}n^{-1}\left[(z-x_i+\epsilon)^\alpha-(\epsilon^\alpha+(z-x_i)^\alpha)\right]\geq 0$$

即此时贫困指数也增加, 从而结论 2 得证。

对任何 $\alpha>2$, 只考虑如下情形(其他情形同样考虑): $x_i<x_j=x_i+d<z$, 对从 i 到 j 的收入转移 $\epsilon>0$, 且 $x_j+\epsilon<z$, 则贫困指数增量为:

$$\begin{aligned}\Delta p_\alpha&=p_\alpha(x-\epsilon e^i+\epsilon e^j,z)-p_\alpha(x,z)\\&=z^{-\alpha}n^{-1}\left[(z-x_j+\epsilon)^\alpha+(z-x_i-d-\epsilon)^\alpha-(z-x_i)^\alpha-(z-x_i-d)^\alpha\right]\end{aligned}$$

上式对 x_i 求导数, 并记 $\alpha=z-x_i, b=z-x_i-d$, 则得:

$$\frac{d(\Delta p_\alpha)}{dx_i}=\alpha z^{-\alpha}n^{-1}(\alpha^{\alpha-1}-(\alpha+\epsilon)^{\alpha-1}+b^{\alpha-1}-(b-\epsilon)^{\alpha-1}$$

利用微分中值定理知 $d(\Delta p_\alpha)/dx_i\leq 0$。可见第 3 个结论成立。

定理说明, 当 $\alpha>2$ 时, (7) 式是满足公理 1～4 的贫困指数。(8) 式说明, 这一贫困指数还满足加可分条件: 部分成员贫困程度的增加将以该部分成员占总成员的比例增加整个贫困指数, 这部分贫困成员越多, 对整个社会的贫困指数影响越大。这一性质应用上是非常重要的, 例如我们可以分省或分民族进行贫困程度评价, 然后加总即得总的贫困指数。

六、绝对贫困指数与相对贫困指数

称贫困指数 $p(x,z)$ 是相对贫困指数, 如果对任何 $\alpha>0$, 成立 $p(\alpha x,\alpha z)=p(x,z)$。即分配向量与贫困线乘以一个相同的常数时, 贫困指数不改变。到目前为止, 我们所讨论过的贫困指数都是相对贫困指数。称贫困指数 $p(x,z)$ 是绝对贫困指数, 如果对任何 $\alpha>0$, 成立 $p(x+\alpha e,z+\alpha)=p(x,z)$, 这里仍以 e 表示分量全为 1 的向量。即分配向量与贫困线同时加上一个相同的常数时, 贫困指数不改变。重要的是注意到贫困线与收入协同改变。

1 加卡瓦蒂相对贫困指数类

加卡瓦蒂(S.R.Chakravarty)构造贫困指数的方法与构造 C- H- U 贫困指数的方法类似[10]。在构造相对贫困指数时, 考虑收入分配向量的连续强单调且严格 S- 凹的位似函数 $W(x)$ 作为社会福利函数。

称方阵 P 是交换阵, 如果 P 是通过交换单位阵的行或列形成的矩阵。称方阵 B 是双随机矩阵, 如果 B 的元素均非负且各行的和与各列的和均为 1, 例如交换阵是双随机矩阵。称函数 R_+^n 上函数 $u(x)$ 是 S- 凹的, 如果对任何 n 阶双随机矩阵 B 成立 $u(Bx)\geq u(x)$。称 $u(x)$ 是严格 S- 凹的, 如果对任何双随机矩阵 B (B 不是交换阵)时成立 $u(Bx)>u(x)$。称函数 $f(x)$ 是位似函数, 如果存在严格增函数 $u(g)$ 与一次齐次函数 $g(x)$ 使 $f(x)=u(g(x))$。称 $f(x)$ 是强单调的, 如果 f 是 x 的任何分量的严格增函数。

因此 W 是位似函数意味着存在一元严格增函数 w 与一次齐次函数 $v(x)$ 使 $W=w(v(x))$。如果没有单调增变换, 仅把 $v(x)$ 做为福利函数时, 则收入分配扩大 α 倍时社会福利也相应扩大 α 倍, 这将与直观不符。选择适当的 $w(\cdot)$ 作单调变换, 可以调整 $v(x)$ 的形状, 使得 W 具有一定的经济意义。

称函数 $f(x)$ 是对称的, 如果对任何交换阵 P 有 $f(Px)=f(x)$。把对称函数取为社会福利函数来进行福利评价时, 社会福利与经济成员的名字无关。以下 S- 凹函数的判别方法值得注意[11]: R_+^n 上可微对称函数 $f(x)$ 是 S- 凹的充要条件是对任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_+^n$ 成立

$$(x_2-x_1)\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}-\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)\leq 0。$$

对收入向量 x, 可以求出均等分配等价量 $\tilde{x}=E(x)$:

$$W(\tilde{x}e)=W(E(x)e)=W(x) \tag{9}$$

由于 W 的强单调性, 可知 $E(x)$ 也是强单调的。由于对任何非交换阵的双随机矩阵 B 有:

$$W(E(Bx)e)=W(Bx)>W(x)=W(E(x)e)$$

从而 $E(x)$ 也是严格 S- 凹函数。显然由于 W 的连续性知 E 也是连续函数。又显然 $E(x)$ 也是一次齐次函数, 实际上, 由于

$v(x)$ 的一次齐次性及 $w(v)$ 的严格单调性,知对任何 $\alpha>0$ 有:

$$w(v(E(x)e))=W(E(x)e)=W(x)$$
$$=w(v(x))\Rightarrow v(E(x)e)=v(x)$$
$$w(v(\alpha E(x)e))=w(\alpha v(E(x)e))$$
$$=w(\alpha v(x))=w(v(\alpha x))$$

所以有 $W(\alpha E(x)e)=W(\alpha x)$,但 $W(\alpha x)=W(E(\alpha x)e)$,即得 $E(\alpha x)=\alpha E(x)$。

对收入向量 x,构造新向量 $y=(x_1,\cdots,x_q,z,\cdots,z)$,即把贫困线以上的成员的收入都取为 z。取 y 的均等收入等价量 $E(y)$,再令贫困指数为:

$$p(x,z)=1-E(y)/z=1-E(x_1/z,\cdots,x_q/z,1,\cdots,1)$$

即得到一类相对贫困指数。由于 E 的强单调性知 $p(x,z)$ 满足单调公理,另外我们不加证明地指出,$p(x,z)$ 也满足转移公理。

考虑基尼社会福利函数:

$$W(x)=\varnothing(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(2(n-i)+1)x_i)$$

其中 $\varnothing(\cdot)$ 是可微严格增函数。又由上面提到的 $S-$ 函数的判别方法知 $W(x)$ 是 $S-$ 凹的。因此 $W(x)$ 是连续强单调且严格 $S-$ 凹的位似函数,注意到 $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=\sum_{i=1}^{2n}i-\sum_{i=1}^{n}2i=n^2$,对收入向量 x 构造向量 $y=(x_1,\cdots,x_q,z,\cdots,z)$,由(9)式即得:

$$E(y)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2(n-i)+1)y_i$$

$$p(x,z)=1-\frac{1}{n^2z}\sum_{i=1}^{n}(2(n-i)+1)y_i$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{q}(2(n-i)+1)\frac{z-x_i}{z}\qquad(10)$$

肖洛克斯(A. F. Shorrocks)从改进森指数的规范化入手也推出了这一指数[13]。尽管利用这里的方法要简捷得多,但肖洛克斯方法的意义在于指出了一种改进森指数的途径。

可以给出 $p(x,z)$ 一个简捷的表示法。注意到相对于 x 的 $y=(x_1,\cdots,x_q,z,\cdots z)$,(12)可以表示为:

$$p(x,z)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2(n-i)+1)\frac{z-y_i}{z}$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2(n-i)+1)\eta_i$$
$$=\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\eta_i-\frac{\bar{\eta}}{n}$$

其中 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\frac{z-y_1}{z},\cdots,\frac{z-y_n}{z})$,$\bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$。记相应分配向量 η 的基尼系数为 $G(\eta)$,则由于:

$$G(\eta)=\frac{n+1}{n}-\frac{2}{n^2\bar{\eta}}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\eta_i$$

可见 $p(x,z)$ 可以写成:

$$p(x,z)=\bar{\eta}(1-G(\eta))。$$

2 加卡瓦蒂绝对贫困指数类

称函数 $f(x)$ 具有等量平移性,如果对任何 $x\in R_+^n$ 及任何 $\alpha\in R$ 成立,则有:

$$f(x+\alpha e)=f(x)+\alpha$$

其中 $x+\alpha e\in R_+^n$。下面考虑连续单调增加严格 $S-$ 凹的社会福利函数 W,满足:

$$W(x)=w(v(x))$$

其中 $w(\cdot)$ 是一元严格增函数,$v(x)$ 具有等量平移性。显然相应均等收入等价量 $E(x)$ 也具有等量平移性,实际上,由于:

$$W(E(x)e)=W(x)\Rightarrow w(v(E(x)e))$$
$$=w(v(x))\Rightarrow v(E(x)e)=v(x)$$

再由:

$$W(E(x+\alpha e)e)=W(x+\alpha e)$$
$$=w(h(x+\alpha e))=w(h(x)+\alpha)$$
$$W((E(x)+\alpha)e)=w(h((E(x)+\alpha)e))$$
$$=w(h(E(x)e)+\alpha)$$

即得所需结论。对 $y=(x_1,\cdots,x_q,z,\cdots,z)$,定义:

$$A(x,z)=z-E(y)$$

以此作为贫困指数,此即所谓绝对贫困指数,注意到 $A(x,z)$ 是一货币数量。在 y 的基础上,当 n 个成员每人增加量为 $z-E(y)$ 的收入时,由 $E(x)$ 的等量平移性得:

$$z-E(y+(z-E(y))e)$$
$$=z-(E(y)+z-E(y))=0$$

因此如果用社会福利函数 W 来评价社会的福利,则在收入向量 y 的基础上,每人增加收入 $z-E(y)$ 时,社会的贫困将不复存在。显然由于福利函数的作用,分配向量 $y+(z-E(y))e$ 不是均等的收入向量。$A(x,z)$ 度量了为消除贫困,每个成员需要增加的收入,又可见整个社会需要的投入量为 $n(z-E(y))$,实际上也可以将这一函数作为贫困指数。$A(x,z)$ 是连续函数,显然满足单调性,另我们不加证明地指出,这一指数也满足转移公理。

考虑社会福利函数:

$$W(x)=w\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}[(n-i+1)^{\alpha}-(n-i)^{\alpha}]y_i\right)$$

其中 w 是严格增函数,$\alpha>1$。可以算得有:

$$A(x,z)=z-\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}[(n-i+1)^{\alpha}-(n-i)^{\alpha}]y_i。$$

七、结语

我们一直是在公理 1～4 的框架下进行讨论的,特别是单调公理与转移公理。实际上,关于贫困指数的文献中还有若干种其他公理,其经济意义都十分明显,特别值得提到的是昆杜(Kundu)给出的公理系统:弱转移单调性(从一个贫困成员向收入较高的成员进行收入转移时,贫困程度不减少)、贫困恶化公

理(若其他条件不变, 贫困线以下人口增加时, 贫困程度恶化)、贫困改善公理(若其他条件不变, 贫困线以上人口增加时, 贫困程度改善)。可见每条公理都有一定的合理性, 但昆杜证明这 3 条公理是不相容的[13]。限于篇幅, 在此我们不对这一结果进行讨论, 但值得指出, 该文结果使我们能更深入地理解贫困评价的公理化方法。这类结论容易理解, 正如线性方程组理论告诉我们的一样, 当条件太多以致于方程组超定时, 方程组的解将不存在。也就是说, 不能不加限制地要求贫困指数既满足这一条件又满足那一条件, 如果的确需要这样, 可以构造多种贫困指数, 每一种适用于某一种特定的需要。

从给出的几种贫困指数可以看到, 贫困人口占整个人口的比例是一个重要指标, 这一指标越大, 则贫困程度越严重。尽管这一点是国外学者设计贫困指数时所考虑的重要因素, 但从经济意义上说, 这也是十分直观的结论, 只要采取措施减少贫困人口的数量, 贫困指数肯定要下降。另外收入的不平等程度越大, 贫困程度很可能越严重, 这可由森贫困指数看出。

至此可以回头审视一下贫困线 z 的有关问题。我们给出的几种指数都与 z 有关, 但随经济的发展, 贫困线应该是动态变化的, 即使是使用同一贫困指数, 也可能使各个时期贫困指数的数值在比较时存在困难。阿特金森(A.B.Atkinson)[14], 福斯特(Foster)与肖沃洛克斯[15]等人建议将贫困线取成某个收入范围 Z^*, 如果两个时期 a 与 b 中, 关于 Z^* 中的每个值, a 时期的贫困指数都较 b 时期的贫困指数来得大, 则显然 a 时期的贫困程度更为严重。但这种做法只是所有贫困状态集合 X 上的偏序, 而且不同的贫困指数可能产生 X 上元素的不同排序。但显然, 有部分结论比没有要好, 同时, 这一思路对进一步研究也有一定的启发性。

经济生活中存在大量的评估需求, 一般的作法是先确定评估客体的若干特征, 再根据这些特征来构造反映客体运动的综合指标, 显然可以借鉴上述贫困评价的思想, 例如采用公理化方法, 来构造综合评价指数。例如国家统计局统计科学研究所对我国小康的评估问题进行了很有意义的研究, 将国民的生活按经济生活、物质生活、精神生活、人口素质、生活环境等特征进行评估以判定这些指标与小康标准的差距[16], 这时综合评价时显然可以利用上述思想。再如隗斌贤对知识经济[17]及李杰林[18]对农业增长方式转变等的评估中, 均对相应问题提出了若干特征, 相应的综合指标的构造问题显然值得深入研究。另外值得指出的是, 对于客体具有多个特征的情形, 构造综合指标时, 可以借鉴苏(Kai-Yuen Tsui)的思想[19], 该文讨论了多个特征物分配的不平等评价。

注释:

①②Sudhir Anand, (1983), Inequality and Poverty in Malaysia (A World Bank Research Publication), Oxford University Press.

③ J. E. Foster, (1985), Inequality Measurement, In Fair Allocation, H. P. Young ed., AMS Short Course Lecture Notes, Vol 33, Providence: American Mathematical Society.

④A. K. Sen, (1976), Poverty: An Ordinal Approach to Measurement, Econometrica, Vol 44, pp.219～31.

⑤S. R. Clark, Hemming & D. Ulph (1981), On Indices for the Measurement of Poverty, The Economic Journal, Vol 91, June, pp.515～26.

⑥J.E.Foster, J.Greer & Eric Thorbecke (1984), A Class of Decomposable Poverty Measures, Econometrica, Vol 52, pp.761～66.

⑦13 A.Kundu & T. E. Smith (1983), An Impossibility Theorem on Poverty Indices, International Economic Review, Vol 24, pp.423～34.

⑧C.Blackorby & D. Donaldson (1980), Ethical Indices for the Measurement of Poverty, Econometrica, Vol 48, pp.1053～60.

⑨ N.Kakwani, (1980), On a Class of Poverty Measures, Econometrica, Vol 48, pp. 437～46.

10 S. R. Chakravarty, (1983), Ethically Flexible Measures of Poverty, Canadian Journal of Economics, Vol 16, pp.74～85.

11 C.Berge, (1963), Topological Spaces, Oliver & Boyd Ltd

12 A.F.Shorrocks, (1995), Revisiting the Sen Poverty Index, Econometrica, Vol 63, pp.1225～30.

14 A.B.Atkinson, (1987) On the Measurement of Poverty, Econometrica, Vol 55, pp.749～64.

15 J.E.Foster & A. F. Shorrocks (1988), Poverty Ordering, Econometrica, Vol 56, pp.173～77.

16 国家统计局统计科学研究所(1998):《中国小康进程报告》, 载《统计研究》, 1998(6)。

17 隗斌贤(1999):《知识经济指标体系及其综合评价》, 载《统计与决策》, 1999, (3)。

18 李杰林(1999):《关于农业增长方式转变的评测指标体系》, 载《河北财贸大学学报》, 1999(1)。

19 Kai-Yuen Tsui, (1995) Multidimensional Generalizations of the Relative and Absolute Inequality Indices: The Atkinson-Kolm-Sen Approach, Journal of Economic Theory, Vol 67, pp.251～65.

(作者单位: 武汉大学数量与技术经济系
武汉 430072)

(责任编辑: 曾国安)