"L系数体系初步"①提要

樊学林 李安南

一、L 系 数

现行复利计算的四个基本复利公式是

普通复利计算:

$F=P\cdot(1+i)^n$ ……(1—1)

$i=(1+r/m)^m-1$ ……(1—2)

连续复利计算:

$F=P\cdot e^{r\cdot n}$ ……(1—3)

$i=e^r-1$ ……(1—4)

式中F为本利和，P为本金，i为实际利率，r为名义利率，n为计息年数，m为一年中计息周期数。

以上四个基本复利公式将年利率i(或r)与计息年数n以指数函数型式联系在一起，使得由它派生的其他复利公式和现金流等值计算公式繁琐、冗长、难于记忆，也使得投资决策分析计算复杂、难解。为了解决复利计算中的这些问题，我们在1986年提出了L系数②，以后又建立了L系数计算体系。

定义：整个计息期利息(F－P)与计息期终了时的本利和F之比称为L系数，即

$L=(F-P)/F$ ……(1—5)

由L系数定义式可以看出，L系数取值范围为大于或等于零，小于或等于1，它是货币时间价值的相对值，是一个无量纲的比率。

将(1—1)～(1—4)式代入(1—5)式得到L系数表达式:

普通复利计算

$L(i,n)=1-1/(1+i)^n$ ……(1—6)

连续复利计算

$L(r,n)=1-1/e^{r\cdot n}$ ……(1—7)

式中L(i,n)、L(r,n)是L系数表达式的符号，是与L为同一概念——L系数的符号。

与L系数相对应，引出了l利率的概念。

定义：整个计息期利息(F－P)与计息期开始时的本金P之比称为l利率，即

$l=(F-P)/P$ ……(1—8)

由l利率定义式可以看出，l利率取值范围为大于或等于零，趋于无穷大。它和L系数具有相同的经济含义，都是描述资金时间价值相对值的经济量，也是一个无量纲的比率，所不同的仅仅是L系数为零时刻本利和向前贴现来看资金的时间价值，而l利率是零时刻本金向后计息来看货币的时间价值，它们具有共轭性质。

将(1—1)～(1—4)式代入(1—8)式得到l利率表达式:

普通复利计算

$l(i,n)=(1+i)^n-1$ ……(1—9)

连续复利计算

$l(r,n)=e^{r\cdot n}-1$ ……(1—10)

将(1—5)和(1—8)式联立得到

$1/L-1/l=1$ ……(1—11)

将(1—9)、(1—10)式式中计息年数n取负值与(1—6)、(1—7)式比较得

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

到：

普通复利计算

$L(i,n)+l(i,-n)=0$ ……(1—12)

连续复利计算

$L(r,n)+l(r,-n)=0$ ……(1—13)

(1—11)～(1—13)式是L系数与l利率关系式，也是它们的共轭式，称它为L系数共轭式。

根据L系数表达式可以绘制L系数值表，考虑到工程经济评价往往并不要求数据精确到千分位、万分位，而只是希望快速得到计算结果，作出评价，故设计一种L系数纸，在L系数纸上可快速地查读L系数值。L系数纸是一种对数纸，其坐标是按对数分度的。也可绘制一种L系数曲线图，在曲线图中可直接查读L系数值。

普通复利L系数曲线图是根据普通复利L系数表达式(1—6)式绘制的，假定不同的L系数值绘制不同的i～n关系曲线，于是得到了一簇不同L系数值的i～n关系曲线。

连续复利L系数曲线图是根据连续复利L系数表达式(1—7)式绘制的，它可以假定式中r·n为一个变量绘制一条连续复利L～(r·n)关系曲线来查读L系数值。

二、普通资金L系数等值计算

在现金流等值计算中常用到复利因子公式，现将L系数与l利率表达式(1—6)、(1—9)式代入普通资金复利因子公式，使得复利因子指数式简化成一种简单的比例式，上表列出了它们的对应关系。

普通资金复利因子公式

复利因子名称	因子符号	复利系数公式	L系数公式
复利终值因子	(F/P,i,n)	$(1+i)^n$	1/L
复利现值因子	(P/F,i,n)	$1/(1+i)^n$	L/1
年金现值因子	(P/A,i,n)	$\frac{(1+i)^n-1}{i\cdot(1+i)^n}$	L/i
投资回收因子	(A/P,i,n)	$\frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	i/L
年金终值因子	(F/A,i,n)	$[(1+i)^n-1]/i$	l/i
还债基金因子	(A/F,i,n)	$i/[(1+i)^n-1]$	i/l

由上表所列L系数公式很容易得到L系数比例式：

$$P:A:F=L:i:l \quad \cdots\cdots(2—1)$$

式中P为现值，它对应L系数；A为等额年值，它对应实际利率i；F为终值，它对应l利率。

根据L系数比例式P：A＝L：i可以绘制现值与等额年值相互转换的P－A转图换，P－A转换图与通过坐标原点的旋标组成了P－A等值转换盘，如图2—1所示。

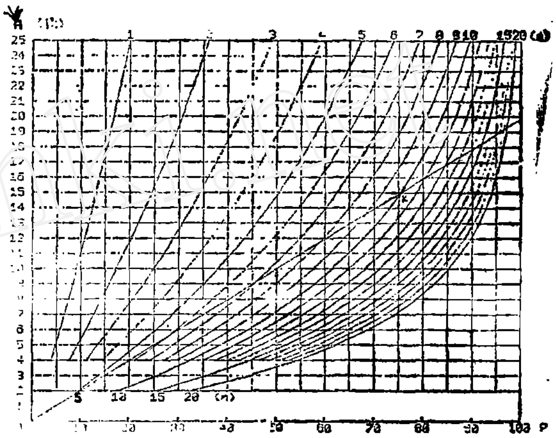


图2—1 P—A等值转换盘

已知年利率i＝15%，计息年数n＝10年，于是在转换图中等利率水平线i＝15%与等年值曲线n＝10相交于一点K，将旋标旋至该点就得到了一条过坐标原点的直线，这就是一条实现P－A等值转换的控制线OK，当现值P＝50万元，则直线P＝50与控制线相交，其交点的纵坐标A＝10，由于横轴P的单位选定为万元，则纵轴A的单位也为万元，故现值50万元等值转换等额年值为10万元。

根据L系数比例式F：A＝l：i可以绘制终值与等额年值相互转换的F－A转换图，F－A转换图与通过坐标原点的旋标组成了F－A等值转换盘，如图2—2所示。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

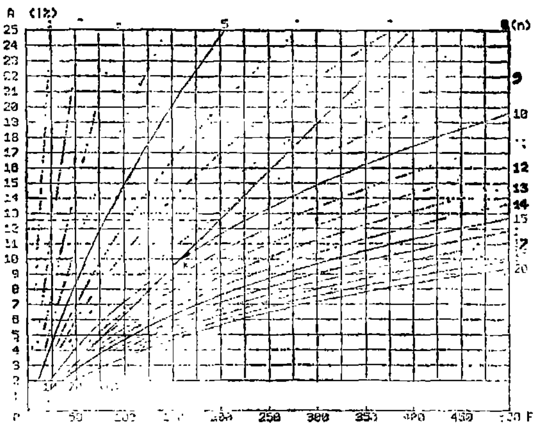


图2—2 F—A等值转换盘

已知年利率i＝10%，计息年数n＝10年，于是在转换图中引等利率水平线i＝10%与等年值曲线n＝10相交于一点K，将旋标旋至该点就得到了一条过坐标原点的直线，这就是一条实现F－A等值转换的控制线OK，当终值F＝200万元，则直线F＝200与控制线相交，其交点纵坐标A＝12.6，由于横轴F的单位选定为万元，则纵轴A的单位也为万元，故终值200万元等值转换等额年值为12.6万元。

如果将P－A转换盘与F－A转换盘的纵轴A重合构成P－A－F等值转换盘，在P－A－F转换盘上可将现值P转换等额年值A，再由等额年值A转换终值F，这样便可实现现值P与终值F之间的相互转换。

三、连续资金L系数等值计算

在连续资金条件下，计算期中均匀流入或流出的均匀分布年金称均匀年金或均匀年值，用字母“U”表示，于是它的定义式是

$dP/dn=U$（或$dF/dn=U$） ……(3—1)

显然上式是没有考虑时间价值的，如果连续资金按连续复利计算，则(3—1)式中均匀年值U应按(1—3)式计算，即

$dP/dn=U/e^{r\cdot n}$ ……(3—2)

将上式在区间［0，n］上积分得到

$$P=\int_0^n U/e^{r\cdot n}dn$$

$$=U\cdot[1-1/e^{r\cdot n}]/r \quad \cdots\cdots(3—3)$$

将L系数表达式(1—7)式代入上式得到

$P:U=L:r$ ……(3—4)

根据以上L系数比例式设计了P－U等值转换盘。

将(1—3)式代入(3—3)式得到

$F/e^{r\cdot n}=U\cdot[1-1/e^{r\cdot n}]/r$

即 $F=U\cdot[e^{r\cdot n}-1]/r$ ……(3—5)

将I利率表达式(1—10)式代入上式得到

$F:U=I:r$ ……(3—6)

根据以上L系数比例式设计了F－U等值转换盘。

如果将P－U转换盘与F－U转换盘的纵轴U重合构成P－U－F等值转换盘，在P－U－F转换盘上可将现值P转换均匀年值U，再由均匀年值U转换终值F，这样便可实现连续资金连续复利条件下现值P与终值F之间的相互转换。

四、现金流等值定理⑥

等额年值A是假定年金仅发生一次，且集中于年末，于是在计算期n＝1条件下，终值F就是等额年值A，同时将n＝1条件式代入I利率表达式(1—9)式便得到I＝i，于是(3—6)式可写成：

$A:U=i:r$ ……(4—1)

上式就是等额年值A与均匀年值U相互转换的L系数比例式，根据这L系数比例式也可设计A－U等值转换盘。

比较(2—1)式与(4—1)式很容易得到L系数比例式的一般形式：

$P:A:U:F=L:i:r:I$ ……(4—2)

式中P为现值，它对应L系数；A为等额年值，它对应实际利率i；U为均匀年值，它对应名义利率r；F为终值，它对应I利率。

应该指出，上式中A与i通常是以年为计息周期的等额值与利率，同时它也可代表月、季等计息周期的等额值与利率，于是(4—2)式可改写为

$P:A_{年}:A_{季}:A_{月}:U:F$

$=L:i_{年}:i_{季}:i_{月}:r:I$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中$A_{年}$、$A_{季}$、$A_{月}$是计息周期分别为年、季、月的现金流等额值；$i_{年}$、$i_{季}$、$i_{月}$是计息周期分别为年、季、月的计息利率。

如果上式中计息周期年、季、月等无限缩小至计息周期为无穷小间隔Δ，于是普通资金普通复利现金流就变成了连续资金连续复利现金流，即公式中$U=m\cdot A_{\Delta}$，$r=m\cdot i_{\Delta}$（m为一年中计息周期数）。

如果上式中计息周期月、季、年无限扩大至整个计算期n年，则式中$F=A_{n年}$，$l=i_{n年}$。

由上分析，上式可改写为

$$P:A_{年}:A_{季}:A_{月}:A_{\Delta}:A_{n年}$$
$$=L:i_{年}:i_{季}:i_{月}:i_{\Delta}:i_{n年}$$

将上式缩写为

$$P:A^{*}=L:i^{*}$$

即 $A^{*}:i^{*}=P:L$ ……（4—3）

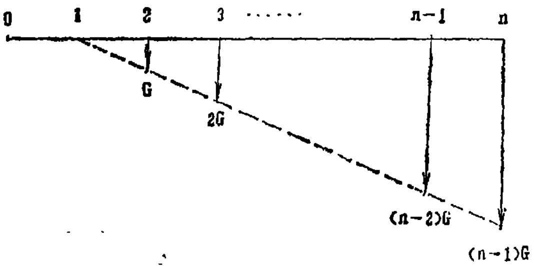
式中A^{*}为任意计息周期期末等额现金流④的等额值，i^{*}为相应计息周期的计息利率。

由（4—3）式得到了期末等额现金流等值定理：具有相同计算期的期末等额现金流等值的充分且必要条件是它们的等额值与计息利率的比值相等。

五、非等额序列现金流L系数等值计算

除了等额序列现金流之外，还有等差、等比及一般序列现金流等值计算。这种非等额序列现金流等值计算实际上是非等额序列现金流与等额序列现金流相互转换的问题，即序列现金流之间的等值计算。

1．等差序列现金流L系数等值计算



等差年值G与等额年值A相互转换的复利公式是

$$A/G=[(1+i)^{n}-i\cdot n-1]/[(1+i)^{n}-1]/i$$

将l利率表达式（1—9）式代入上式得

$$A/G=(l-i\cdot n)/(l\cdot i)$$

即 $A/G=1/i-n/l$ ……（5—1）

（5—1）式是等差年值G与等额年值A相互转换的L系数公式，由该式不能设计G－A等值转换盘，现进行以下数学变换。

由于 $l=(1+i)^{n}-1$

故 $n=\lg(1+l)/\lg(1+i)$

将上式代入（5—1）式得

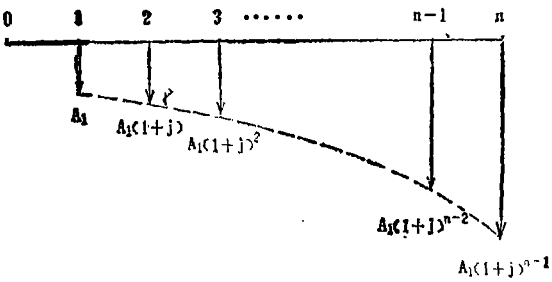
$$A/G=1/i-\lg(1+l)/[l\cdot\lg(1+i)]$$
$$=[\lg(1+i)/i-\lg(1+l)/l]/\lg(1+i)$$

于是

$$\frac{A}{G}=\lg\frac{(1+i)^{1/i}}{(1+l)^{1/l}}/\lg(1+i)\quad\cdots\cdots(5—2)$$

由（5—2）式可以设计G－A等值转换盘，它是在对数坐标系内绘制曲线设计的一种转换盘。

2．等比序列现金流L系数等值计算



年金基值A_1与等额年值A相互转换的复利公式是

$$\begin{cases}A/A_1=\dfrac{i\cdot[(1+i)^{n}-(1+j)^{n}]}{(i-j)[(1+i)^{n}-1]} & (i\neq j)\quad\cdots\cdots(5—3)\\[2ex] A/A_1=\dfrac{i\cdot n\cdot(1+i)^{n}}{(1+i)[(1+i)^{n}-1]} & (i=j)\quad\cdots\cdots(5—4)\end{cases}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令 $l(j,\ n)=(1+j)^n-1$

$L(i,\ 1)=i/(1+i)$

则(5—3)、(5—4)式可改写为

$$\begin{cases} A/A_1=\dfrac{1-l(j,n)/l(i,n)}{1-j/i} & (i\neq j)\ \cdots\cdots(5—5) \\ A/A_1=L(i,\ 1)\cdot n/L(i,\ n) & (i=j)\ \cdots\cdots(5—6) \end{cases}$$

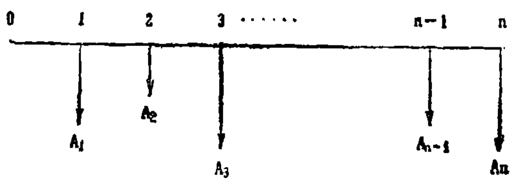
(5—5)、(5—6)式是等额年值A与年金基值A_1相互转换的L系数公式，由该式是不能设计$A-A_1$等值转换盘的，现进行以下数学变换

将(2—1)式代入(5—5)、(5—6)式得到

$$\begin{cases} F/A_1=[l(i,\ n)-l(j,\ n)]/(i-j) & (i\neq j)\ \cdots\cdots(5—7) \\ P/A_1=n/(1+i) & (i=j)\ \cdots\cdots(5—8) \end{cases}$$

在年利率i与等比系数j不相等条件下，由(5—7)式便可以在F—A等值转换盘上(图2—2)直接实现F—A_1等值转换，从而也就实现了$A-A_1$的等值转换。在i与j相等条件下，由(5—8)式已知A_1可直接计算现值P，再在P—A等值转换盘上实现P—A等值转换，从而也就实现了$A-A_1$的等值转换。

3．一般序列现金流L系数等值计算



已知各年年值$A_k(k=1,2,\cdots)$求等值的等额现金流年值A的复利公式是

$$A=\frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(1+i)^k}$$

现用L系数公式代入得到

$$A=i/L(i,\ n)\cdot\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot[1-L(i,\ k)] \quad \cdots\cdots(5—9)$$

(5—9)式就是一般序列现金流等值计算的L系数公式，对于等差序列现金流$A_k=G\cdot(k-1)$代入(5—9)式可得到(5—2)式；对于等比序列现金流$A_k=A_1\cdot(1+j)^{k-1}$代入(5—9)式可得到(5—5)或(5—6)式，对于等额序列现金流$A_k=A$代入(5—9)式可得到恒等式A=A。

六、计算查读工程项目经济评价指标

按照复利计算体系，项目动态投资回收期T公式是

$T=-\lg(1-K\cdot i/R)/\lg(1+i)$

式中K为期初一次投资，R为平均年净收益，i为基准收益率。

将上式整理化简得到

$1-1/(1+i)^T=K\cdot i/R$

令动态投资回收期T为计算年数，将L系数表达式(1—6)式代入上式整理得到

$K:R=L(i,\ T):i$ ……(6—1)

(6—1)式就是项目动态投资回收期L系数比例式⑤，将它与L系数比例式$P:A=L(i,\ n):i$比较，式中投资K就是现值P，平均年净收益R就是等额年值A，基准收益率就是年利率i，动态投资回收期T就是计算期年数n，因此在P—A等值换算盘上在已知K、R、i条件下可直接查读动态投资回收期T。

按照复利计算体系，项目内部收益率IRR求解方程式是

$K-R\cdot[1/(1+IRR)+1/(1+IRR)^2+\cdots+1/(1+IRR)^n]=0$

式中n为项目寿命期，由于

$1/(1+IRR)+1/(1+IRR)^2+\cdots+1/(1+IRR)^n=[1-1/(1+IRR)^n]/IRR$ 故

$K-R\cdot[1-1/(1+IRR)^n]/IRR=0$

令项目内部收益率IRR为年利率，将L

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

系数表达式(1—6)式代入方程式整理得到

$K:R=L(IRR,n):IRR$ ……(6—2)

(6—2)式就是项目内部收益率L系数比例式，将它与L系数比例式$P:A=L(i,n):i$比较，式中投资K就是现值P，平均年净收益R就是等额年值A，项目经济寿命期就是计算期年数n，内部收益率IRR就是年利率i，因此在P—A等值换算盘上在已知K、R、n条件下，可直接查读项目内部收益率IRR。

按照复利计算体系，项目现值指数PVI公式是

$$PVI=\frac{R\cdot[(1+i)^n-1]}{K\cdot i\cdot(1+i)^n}$$

将L系数表达式(1—6)式代入上式得到

$PVI=(R\cdot L/i)/K$ ……(6—3)

(6—3)式就是项目现值指数PVI的L系数公式，由于净现值率NPVR是现值指数PVI减1，故项目净现值率L系数公式是

$NPVR=(R\cdot L/i)/K-1$ ……(6—4)

根据现值指数L系数公式(6—3)式可设计现值指数查读盘直接查读项目现值指数。

按照复利计算体系，项目益本比B/C公式是

$$B/C=\frac{B\cdot[(1+i)^n-1]}{C'\cdot[(1+i)^n-1]+i\cdot(1+i)^n\cdot K}$$

式中B为平均年收益，C′为平均年运行费用，C为平均年费用。

将L系数表达式(1—6)式代入上式得到

$B/C=B/(C'+K\cdot i/L)$ ……(6—5)

(6—5)式是项目益本比B/C的L系数公式，根据(6—5)式可设计益本比查读盘直接查读项目益本比。

按复利计算体系，残值贴现值P_z公式是

$P_z=S/(1+i)^n$

式中S为项目残值。

将L系数表达式(1—6)式代入上式得到

$P_z=S\cdot(1-L)$ ……(6—6)

(6—6)式是项目残值贴现值P_z的L系数公式，根据(6—6)式可设计残值贴现查读盘直接查读项目残值贴现值P_z。

七、计算查读时间数列平均速度指标

L系数体系是以L系数为逻辑起点，以货币等值计算为逻辑中介，通过一系列概念范畴的逻辑推演，把货币等值的内在规律复制出来，到达逻辑终点，建立起一种新的动态数列（时间数列）计算方法体系。因此在上述货币等值计算中所讨论的一系列L系数公式和查读图表可以用于时间数列平均速度指标的计算和查读。例如在计算和查读几何法平均发展速度时，时间数列最末水平a_n就对应于等值计算中的终值F，最初水平a_0就对应于现值P，几何法平均增长速度就对应于年利率i等；又例如在计算和查读方程法平均发展速度时，时间数列各年实际水平总和Σa_i就对应于等值计算中期初等额现金流⑩终值F，最初水平a_0就对应于等额年值A，方程法平均增长速度就对应于年利率i等。

应该指出在货币等值计算中利率i是一个正数，这是上述L系数公式推导和查读图表绘制的一个很重要的约束条件，但是在一般时间数列中平均增长速度（它对应于货币等值计算中利率i）有可能为正数，也有可能为负数，即时间数列可能为正增长，也有可能为负增长，于是就有必要进一步讨论利率i为负数条件下的L系数公式和查读图表。

令 $I=L(i,1)$ $i=l(i,1)$

则 $I=i/(1+i)$ 或 $i=I/(1-I)$ ……(7—1)

式中I是计息年数n为1的L系数，称它为年系数，i是计息年数n为1的l利率，称它为年利率，显然年系数I与年利率i是一对共轭值，将它们引入L系数，l利率表达式进行比较，可得到如下最基本的共轭式

$$\begin{cases}L(i,n)=-l(i,-n) & \cdots\cdots(7-2)\\ l(i,n)=-L(i,-n) & \cdots\cdots(7-3)\end{cases}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} L(i,n)=-l(-I,n) & \cdots\cdots(7\text{—}4) \\ l(i,n)=-L(-I,n) & \cdots\cdots(7\text{—}5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(i,n)=L(-I,-n) & \cdots\cdots(7\text{—}6) \\ l(i,n)=l(-I,-n) & \cdots\cdots(7\text{—}7) \end{cases}$$

应用以上L系数共轭式就可以将年利率i为负数的L系数公式变换为年系数I为正数的L系数公式，于是时间数列无论是正增长还是负增长，都可以应用L系数公式来计算它的平均增长速度和平均发展速度。

应用以上L系数共轭式也可以将年利率i为负数的查读图表变换为年系数I为正数的查读图表，所不同的仅需将年系数I的坐标按照(7—1)式变换为年利率i的坐标。于是时间数列无论是正增长还是负增长，都可以应用查读图表直接查读它的平均增长速度和平均发展速度。

八、L(l)诺模图与L系数盘

根据L系数公式设计了一种动态计算的工程实用图表，称它为L(l)诺模图，它分为L系数诺模图②与l利率诺模图。

在L系数诺模图上可实现现值与等额年值的相互转换、现值与终值的相互转换，也可直接查读规范评价工程⑦动态投资回收期、内部收益率指标，还可直读翻番参数等。除此之外，对于较复杂现金流的评价工程可应用查读内部收益率的L诺模图法⑧快速地求出项目内部收益率值。

在l利率诺模图上可实现等额序列终值与等额年值的相互转换，也可实现等比序列年金基值与等额序列等额年值的相互转换。

根据L系数公式还设计了一种动态计算的实用转盘，称它为工程经济L系数盘，工程经济L系数盘现已申请中国发明专利。

在工程经济L系数盘等值换算面上可实现等额序列与等差序列各种参数等值计算，也可实现普通资金序列现金流与连续资金序列现金流的各种参数等值计算。在工程经济L系数盘指标查读盘上可直接查读动态投资回收期、内部收益率、现值指数（净现值率）、益本比等多种经济评价指标。

“L系数体系初步”仅介绍了L系数计算体系与复利计算体系对照部分的公式及其应用，对于L系数计算体系自身还有它更深层次的理论基础和计算公式，利用这些更深层次的理论基础和计算公式可使现实经济活动中较复杂的动态计算问题得到解决，例如在计息利率发生变化条件下的货币等值计算，即变利率现金流的等值计算理论与公式，又如通货膨胀条件下货币贬值与增殖的二元价值空间计算理论与公式等。

“L系数体系初步”也仅仅介绍了它在时间数列平均速度指标的计算和查读方面的内容，实际上它作为一种动态数列计算方法体系，十分强调了它的独立性、完整性和一致性，成为会计投资数学、经济分析数学、技术经济学、社会经济统计学、工程经济学等动态数列计算中的一种主要计算方法。

注释：

①详见电教片《L系数体系初步》，1991年12月，武汉大学音像教材出版社出版。

②详见《基建优化》1986年第2期“L系数法——一种简化复利因子的计算法”一文。

③详见《武汉大学学报(社科版)》，1991年第6期“现金流等值定理与L诺模图”一文。

④期末等额现金流是假定把现金流中资金流出流入的时点规定在计息周期期末的等额现金流。

⑤详见《武汉大学学报（社科版）》1990第2期“动态投资回收期测算新法”一文。

⑥期初等额现金流是假定把现金流中资金流出流入的时点规定在计息周期期初的等额现金流。

⑦将评价工程中实际发生的现金流通过等值变换，最终得到仅具有期初投资和平均年净收益（或年收益与年运行费用）的典型评价工程，称它为规范评价工程。

⑧详见《武汉大学学报（社科版）》1992年第3期“求解内部收益率L诺模图法”一文。

（责任编辑　徐开榜）

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net